Erzeugende Funktionen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

(Fassung Juli 2006)

Markus Schieche

Email: mail@markus-schieche.de
Homepage: www.markus-schieche.de

Vorwort

Viele Fragen, die sich beim Umgang mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen stellen, sind einfacher zu lösen, wenn die erzeugende Funktion der Verteilung bekannt ist. Was aber diese erzeugende Funktion (EZF) genau ist, war mir selbst lange nicht klar. An dieser Stelle sei daher gesagt, dass es keine Funktion ist in die man einen Wert einsetzt um etwas zu berechnen. Sie ist vielmehr ein Hilfsmittel mit dem Zusammenhänge nachgewiesen werden können. Erst diese Zusammenhänge können dann wieder in Funktionen oder auch Rekursionen überführt werden, die dann wieder „rechenbar" sind. Meist wird die EZF in Tabellenform für die einzelnen Wahrscheinlichkeitsfunktionen einfach angegeben. Ab diesem Punkt kann das Problem natürlich wieder formalmathematisch gelöst werden. So lässt sich die Reproduktivität der Poissonverteilung mittels ihrer erzeugenden Funktion $e^{\mu(t-1)}$ ganz einfach beweisen, da gilt $e^{\mu(t-1)} \cdot e^{\lambda(t-1)} = e^{(\mu+\lambda)(t-1)}$.

Die folgenden Ausführungen sollen die Idee hinter der erzeugenden Funktion von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, speziell der Poissonverteilung, erläutern. Hierbei stand zuerst einmal die Anschaulichkeit im Vordergrund. Die mathematische Exaktheit der einzelnen Rechenwege lässt sicher etwas zu Wünschen übrig. Dieser ist aber in zahlreichen Publikationen[1], die im Internet frei zugänglich sind, ausreichend Rechnung getragen.

Die Grundidee der erzeugenden Funktion, speziell in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, ist es ein Gerüst zu liefern, welches es ermöglicht als Summen angegebene Wahrscheinlichkeitsverteilungen[2] mittels eines „ersatzweisen" Funktionsausdrucks in geschlossener Form darzustellen. Dieser ersatzweise Funktionsausdruck stellt die Summenfunktion jedoch nicht selbst dar, sondern eine Verbindung dieser in einer multiplikativen Verknüpfung mit einer konvergenten Potenzreihe. Hierdurch bleibt die Charakteristik der Wahrscheinlichkeitsverteilung aber erhalten und man kann die erzeugende Funktion, die deutlich handlicher ist als die Summenfunktion, nutzen um relativ einfach Zusammenhänge abzuleiten.

[1] Beispielweise: http://www.matha.mathematik.uni-dortmund.de/~scharlau/M2Inf/LAfI-kompl.pdf

[2] Bei Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Binomial-, Poisson- etc.) kann in der Regel nur die Dichtefunktion in einem geschlossenen Funktionsausdruck angegeben werden. Für das Integral der Dichtefunktion, der Wahrscheinlichkeitsverteilung, ist dies in der Regel nicht möglich.

Inhaltsverzeichnis

* Noch offen.

Abkürzungsverzeichnis

EZF	erzeugende Funktion
t	„Erzeugungsvariable" für die erzeugende Funktion. Siehe Erläuterung im Text bei der ersten Verwendung.
n	allgemeine Zählvariable
μ *bzw.* λ	Jeweils die Variable für den Parameter der Poissonverteilung, der gleichzeitig Erwartungswert und Varianz darstellt.
$P_\mu(n)$	Poisson-Wahrscheinlichkeitverteilung mit Parameter μ (oder auch λ) an der Stelle n. Die fehlende Angabe von n steht dann für die Gesamte Verteilung mit $n=0$ bis $n \to \infty$.
$p_\mu(n)$	Wahrscheinlichkeits<u>dichte</u> einer Poissonverteilung mit Parameter μ (oder auch λ) an der Stelle n.
GP_μ	Erzeugende (<u>g</u>enerating) Funktion der Poissonverteilung mit Parameter μ (oder auch λ).
S(…)	Summe der Verteilungsfunktion in der Klammer
E(…)	Erwartungswert der Verteilungsfunktion in der Klammer
V(…)	Varianz der Verteilungsfunktion in der Klammer

1. Konvergente Potenzreihen

Konvergente Potenzreihen sind eine Art Grundgerüst für alle erzeugenden Funktionen. An der Potenzreihe wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung dann später auf- oder auch angehängt, um dann die erzeugende Funktion zu erhalten. Zuerst soll aber einmal die Frage geklärt werden, wieso überhaupt Potenzreihen? Die Antwort liegt in deren Ähnlichkeit mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen. **Konvergente Potenzreihen** steigen stetig[3] an und nähern sich ihrem Grenzwert. Daher sind sie für ihren begrenzten Wertebereich zwischen Null und dem Grenzwert eindeutig umkehrbar (bijektiv).

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ ist die einfachste Form einer Reihe, die für *t < 1* eine Konvergenz aufweist. Andere Reihen wie $\sum_{n=0}^{\infty} t$; $\sum_{n=0}^{\infty} t/n$ oder $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot t$ sind nicht konvergent.

Exkurs: Konvergenz einer Potenzreihe

Die Partialsumme der folgenden geometrischen Reihe lässt sich wie folgt errechnen:

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} a \cdot t^n = a + a \cdot t + a \cdot t^2 + ... + a \cdot t^n = a \cdot \left(1 + t + t^2 + ... + t^k\right)$$

$s_k = a \cdot \left(1 + t + t^2 + ... + t^k\right)$ Ausklammern von *a*

$t \cdot s_k = a \cdot \left(t + t^2 + t^3 + ... + t^{k+1}\right)$ Multiplikation mit dem Faktor *t*

$s_k - t \cdot s_k = a \cdot \left(1 - t^{k+1}\right)$ Die beiden vorherigen Reihen voneinander subtrahieren

$s_k(1-t) = a \cdot \left(1 - t^{k+1}\right)$ Ausklammern von s_k

$$s_k = \frac{a \cdot \left(1 - t^{k+1}\right)}{(1-t)}$$

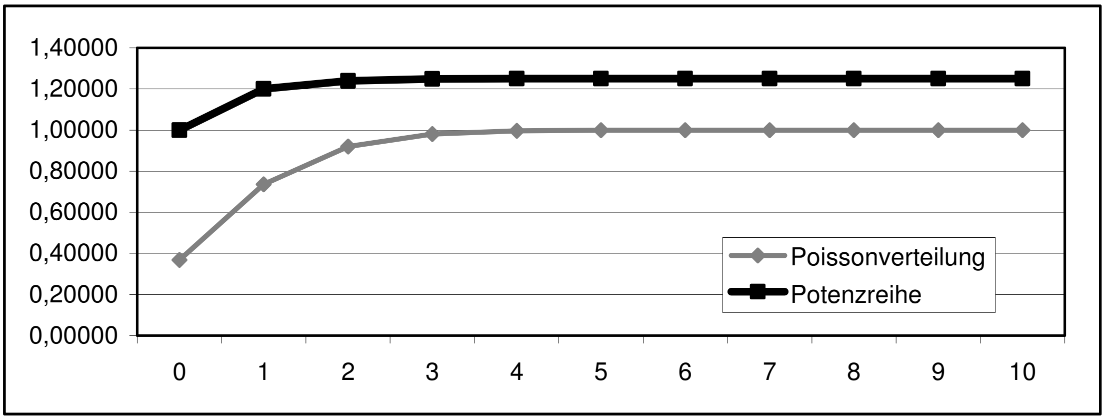
$$\lim_{k \to \infty} = \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot t^n = \lim_{k \to \infty} \frac{a \cdot \left(1 - t^{k+1}\right)}{(1-t)} = a \cdot \frac{1}{1-t} \qquad \textit{für } t < 1$$

Probe (der Vorfaktor a wird hier nicht beachtet, da dieser komplett ausgeklammert werden kann):

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \cdot (1-t) = (1-t) \cdot t^0 + (1-t) \cdot t^1 + (1-t) \cdot t^2 ... = 1 \underbrace{- t + t}_{=0} \underbrace{- t^2 + t^2}_{=0} - t^3 ... = 1$$

[3] Ein nicht stetiger Anstieg bei einer Wahrscheinlichkeitsverteilung würde in deren Dichtefunktion negative Wahrscheinlichkeiten unterstellen, was anschaulich schon unplausibel ist.

Poissonverteilung		**Potenzreihe (Zähldichten)**	**Potenzreihe Σ**
n =	**P(μ = 1)**	**t=0,2**	**t=0,2**
0	0,36788	1,00000	1,00000
1	0,73576	0,20000	1,20000
2	0,91970	0,04000	1,24000
3	0,98101	0,00800	1,24800
4	0,99634	0,00160	1,24960
5	0,99941	0,00032	1,24992
6	0,99992	0,00006	1,24998
7	0,99999	0,00001	1,25000
8	1,00000	0,00000	1,25000
9	1,00000	0,00000	1,25000
10	1,00000	0,00000	1,25000



* Ähnlichkeit von Poissonverteilung und Potenzreihe

Konvergenz gegen unterschiedliche Grenzwerte ließe sich einfach durch Division der Potenzreihe mit 1,25 oder allgemein mit *(1-t)* beheben.

Verbindet man die beiden Reihen multiplikativ miteinander, streben sie wiederum gegen einen gemeinsamen Grenzwert. Hier ist besonders wichtig, dass beide Reihen einzeln auch konvergieren, denn nur dann ist die gemeinsame Konvergenz auch wirklich zwingend. Diese Beschreibung dieses Grenzwertes in Abhängigkeit von *t* ist die erzeugende Funktion – in diesem Beispiel mit der Poissonverteilung $e^{\mu(t-1)}$, die wie folgt hergeleitet wird.

$$e^{\mu(t-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(p_\mu(n)\cdot t^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mu^n}{n!}\cdot e^{-\mu}\cdot t^n\right) = e^{-\mu}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(\mu\cdot t)^n}{n!}\right) = e^{-\mu}\cdot e^{\mu\cdot t}$$

Anschaulich kann man diese Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten mit der Potenzreihe so erklären, dass man die Ergebnisse t^n mit den Wahrscheinlichkeitsdichten der Poissonverteilung gewichtet. Hierbei erhält jede Wahrscheinlichkeitsdichte ihr individuelles t^n, welches zugleich den Zählindex n mitliefert. Das t^n wird teilweise auch als Wäscheklammer bezeichnet an der die Wahrscheinlichkeiten „aufgehängt“ werden. Damit kann man die Aussage treffen, dass alles was mit einem t^n alleine passiert, auch auf dessen *n-te* zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte zutrifft.

n	0	1	2	… n
Glied der Potenzreiehe	t^0	t^1	t^2	… t^n
Wahrscheinlichkeit aus der Poissonverteilung	$\frac{\mu^0}{0!} \cdot e^{-\mu}$	$\frac{\mu^1}{1!} \cdot e^{-\mu}$	$\frac{\mu^2}{2!} \cdot e^{-\mu}$	$\ldots \frac{\mu^n}{n!} \cdot e^{-\mu}$

Man kann sich daher zur Vereinfachung zunächst wieder nur auf Potenzreihen beschränken, da die Wahrscheinlichkeitsdichten in Abhängigkeit von *n* später einfach an die einzelnen Summanden wieder angehängt werden können. Somit kann die im Folgenden beschriebene Faltung von zwei Poissonverteilungen zuerst mit zwei relativ einfachen Potenzreihen durchgeführt werden. Sind hier die Zusammenhänge deutlich, kann die Poissonverteilung[4] einfach später angehängt werden. Die hergeleiten Zusammenhänge sind dann ohne eine erneute Beweisführung einfach übertragbar.

Ist der Zusammenhang auf Ebene der erzeugenden Funktionen erst einmal hergestellt, kann die Potenzreihe wiederum durch Grenzwertbildung[5] für $t \rightarrow 1$ elegant entfernt werden. Was übrig bleibt ist die Aussage über die Ursprungsfunktion selbst. Diese Vorgehensweise wird an den betreffenden Stellen später noch genau erläutert.

[4] Die Idee der erzeugenden Funktion sind allgemeiner Natur und daher auch auf andere diskrete Verteilungen wie Binomial- oder die stetige wie Gammaverteilung übertragbar. Bei stetigen Verteilungen arbeitet man dann statt mit der Summe mit dem Integral.

[5] Da als Konvergenzbedingung gilt t < 1, darf formell t = 1 nicht verwendet werden. Zur Vereinfachung wird dies später dennoch gemacht. Der korrekte Weg wäre über den Limes (lim $t \rightarrow 1$) , was aber zur gleichen Aussage führt.

2.1 Grundlagen der Rechenvorschrift Faltung

Die Faltung beschreibt einen mathematischen Operator, der für zwei (oder mehrere) Funktionen f und g eine hieraus resultierende neue Funktion liefert, die die Überlappung von f und einer gespiegelten und verschobenen Variante von g angibt.

Für die konkrete Anwendung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung bedeutet die Faltung beispielsweise folgendes:

Die beiden Funktionen f und g sind Zweipunktverteilungen eines Münzwurfs. Fällt Kopf (0) erhält der Spieler keinen Gewinn – fällt hingegen Zahl (1) wird ein Gewinn von einer Geldeinheit ausgezahlt. Die Wahrscheinlichkeit für jedes dieser Ereignisse beträgt p = 0,5.

$$f(x) = \begin{cases} 0 = 0{,}5 \\ 1 = 0{,}5 \end{cases} \text{ und } g(x) = \begin{cases} 0 = 0{,}5 \\ 1 = 0{,}5 \end{cases}$$

Die Faltung von f und g geschrieben – *f*g(x)* bedeutet nun, dass die resultierende Funktion einen zweifachen Münzwurf beschreibt und Wahrscheinlichkeiten für den Gewinn von 0, 1 oder 2 Geldeinheiten angibt. Bei diesem einfachen Beispiel ist die Wertetabelle noch manuell ermittelbar.

$$f * g(x) = \begin{cases} 0 = 0{,}25 \\ 1 = 0{,}75 \\ 2 = 0{,}25 \end{cases}$$

Will man hingegen zwei Poissonverteilungen miteinander falten, gestaltet sich dies schon deutlich aufwendiger. Auch wäre die Faltung aufgrund der unendlichen Definitionsmenge der Poissonverteilung ohnehin manuell nicht vollständig durchführbar. Das Ergebnis der Faltung sollte Idealerweise eine neue Formel in Form einer Summenfunktion sein. Möglich wäre als Ergebnis auch das Ermitteln eines Zusammenhangs für eine rekursive Berechnung. In der nachfolgenden Tabelle wurden einmal exemplarisch zwei Poissonverteilungen gefaltet.

Poissonverteilung 1		Poissonverteilung 2		Faltung von 1 & 2	
n =	P(μ = 1)	n =	P(λ = 2)	Verlust	(Pμ * Pλ)
0	36,79%	0	13,53%	0	4,98%
1	36,79%	1	27,07%	1	14,94%
2	18,39%	2	27,07%	2	22,40%
3	6,13%	3	18,04%	3	22,40%
4	1,53%	4	9,02%	4	16,80%
5	0,31%	5	3,61%	5	10,08%
6	0,05%	6	1,20%	6	5,04%
7	0,01%	7	0,34%	7	2,16%
8	0,00%	8	0,09%	8	0,81%
9	0,00%	9	0,02%	9	0,27%
10	0,00%	10	0,00%	10	0,08%
11	0,00%	11	0,00%	11	0,02%
12	0,00%	12	0,00%	12	0,01%
13	0,00%	13	0,00%	13	0,00%
14	0,00%	14	0,00%	14	0,00%
15	0,00%	15	0,00%	15	0,00%
Σ	100,00%	Σ	100,00%	Σ	100,00%

* Faltung zweier Poissonverteilungen

An der Stelle n ist die Faltung beschrieben durch: $(P_\mu * P_\lambda)(n) = \sum_{i=0}^{n} P_\mu(i) \cdot P_\lambda(k-i)$

Die komplette Faltung ist beschrieben durch $(P_\mu * P_\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} \cdot e^{-\mu} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda}$

2.2 Faltung zweier Potenzreihen

Man definiert formal die Faltung von zwei konvergenten (*t < 1*) Potenzreihen ohne speziellen Bezug auf Wahrscheinlichkeiten als:

$$\left(a_{(t)} * b_{(t)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot t^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b \cdot t^n$$

Bei einer Umformung mit Hilfe des Cauchy-Produktes[6] erhält man:

$$\left(a_{(t)} * b_{(t)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot t^n \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$$

Der Index *n* für *a, b* und *c* ist hier eigentlich nicht nötig, da diese Faktoren konstant sind, wird aber zur formalen Unterscheidung beider Reihen verwendet.

An dem Glied t^n der Potenzreihe „hängt" nun multiplikativ das Cauchy-Produkt für *n*. Eine Potenzreihe wählt man deshalb, weil alle Glieder einer Potenzreihe (t^n ´s) nicht weiter zusammengefasst werden können und für *t < 1*, wie bereits erwähnt, eine Konvergenz aufweisen. Würde man beispielsweise nur die Zählvariable *n* selbst oder *1/n* verwenden, ließen sich die einzelnen Glieder zusammenfassen. So ist z.B.: $n_3 + n_4 = 3 + 4 = 7$ hingegen $n_3 + n_4 = t^3 + t^4$ sind nicht weiter zusammenfassbar und bleiben, daher „unterscheidbar".

Die Summendarstellungen können nur in einen geschlossenen Funktionsausdruck überführt werden, der als Variable nur noch den „Aufhänger" *t* für die Cauchy-Produkte enthält.

$a_{(t)} = a \cdot \frac{1}{1-t}$ und $b_{(t)} = b \cdot \frac{1}{1-t}$

[6] Augustin Louis Cauchy (* 21. August 1789 in Paris; † 23. Mai 1857 in Sceaux) war ein französischer Mathematiker.

Statt beide Summen zu falten, kann man nun auch eine der beiden Summen durch ihren geschlossenen Funktionsausdruck ersetzen. z.B.

$$\left(a_{(t)} * b_{(t)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot t^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b \cdot t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot t^n \cdot b \cdot \frac{1}{1-t} = a \cdot b \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} t^n \cdot \frac{1}{1-t}}_{}$$

Würde man den oberen Teil tatsächlich über die beiden Summen darstellen, würde man ausgeschrieben folgende Reihe erhalten:

$$\left[t^0 \cdot t^0 + t^0 \cdot t^1 + t^0 \cdot t^2 + \ldots + t^0 \cdot t^\infty\right] + \left[t^1 \cdot t^0 + t^1 \cdot t^1 + t^1 \cdot t^2 + \ldots + t^1 \cdot t^\infty\right] + \left[t^2 \cdot t^0 + \ldots\right]..$$

$$\underbrace{t^0\left[t^0 + t^1 + t^2 + \ldots\right]}_{} + t^1\left[t^0 + t^1 + t^2 + \ldots\right] + t^2\left[t^0 + t^1 + t^2 + \ldots\right] + \ldots$$

Was hängt also alles am „Aufhänger“ t^0? Eine komplette Potenzreihe $\Sigma\ t^n$.

$$\underbrace{t^0\left[\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right]}_{} + t^1\left[\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right] + t^2\left[\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right] + \ldots$$

An dieser Stelle wird nun der eigentliche Kniff der erzeugenden Funktion angewendet. Statt der ganzen Reihe kann man vereinfachend auch einfach nur ihre Konvergenz an t^0 „anhägen“ - also:

$$\underbrace{t^0\left[\frac{1}{1-t}\right]}_{} + t^1\left[\frac{1}{1-t}\right] + t^2\left[\frac{1}{1-t}\right] + \ldots$$

Man kann es sich auch so erklären, dass die Summenschreibweise ein unendlich langer Faden ist, der gegen Ende immer dünner wird. Der Umgang damit wird äußerst schwierig sein. Die Konvergenz des Fadens ist dann eine komplette Garnrolle[7]. Möchte man nun den Faden wiegen, legt man statt dem Faden einfach nur die Garnrolle auf die Wage und hat sofort das Ergebnis, statt sich mit dem Faden herumzuschlagen, der danach verknotet, gerissen oder was auch immer ist.

[7] Die Garnrolle hat hier selbstverständlich keinerlei Eigengewicht.

Gleiches gilt für alle übrigen t^n. Diese Reihe der Aufhänger konvergiert selbst auch wieder. Damit ist eben auch die folgende Schreibweise zulässig:

$$\left(a_{(t)} * b_{(t)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot t^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b \cdot t^n = [a \cdot b] \cdot \left[\frac{1}{1-t}\right] \cdot \left[\frac{1}{1-t}\right] = [a \cdot b] \cdot \frac{1}{(1-t)^2}$$

Die obere Formel stellt das Grundgerüst für die erzeugenden Funktionen dar. Durch Austausch von a und b durch z.B.

$$a = b = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

…für die Poissonverteilung können auch Wahrscheinlichkeitsverteilungen über dieses Gerüst gefaltet werden. Alle ausmultiplizierten Wahrscheinlichkeitsdichten „hängen“ an einem t^n. Die einzelne Darstellung der Cauchy-Produkte kann jedoch wieder durch den geschlossenen Funktionsausdruck in Abhängigkeit von *t* ersetzt werden. Das Ergebnis ist die erzeugende Funktion der Faltung. Dieses kann die erzeugende Funktion der identischen oder einer anderen Wahrscheinlichkeits-verteilung sein. Dann kann statt der Faltung von da ab gleich die resultierende Funktion verwendet werden. Ist dies nicht möglich, kann noch versucht werden aus der erzeugenden Funktion eine Rekursion für die Berechnung der Verteilung abzuleiten.

Die „normale“ erzeugende Funktion ist somit definiert als

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$$

Weiterhin existiert noch eine exponentiell erzeugende Funktion, da für exponentiell ansteigende a_n die Konvergenzeigenschaft der unendlichen Reihe nicht mehr sichergestellt ist. Durch die Fakultät wir die Konvergenz wieder sichergestellt.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \cdot t^n$$

2.3 Übertragen der Erkenntnisse mit den Potenzreihen auf die EZF

Wie unter 2.2 bereits abgedeutet wird nun die Poissonverteilung an die Potenzreihe angehängt. Da für die Faltung zwei Poissonverteilungen benötigt werden, werden zunächst für die beispielhaften Poissonverteilungen die erzeugenden Funktionen bestimmt.

$P_\mu = e^{-\mu} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!}$ mit der erzeugenden Funktion $GP_\mu = e^{-\mu} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} \cdot t^n = e^{\mu(t-1)}$

$P_\lambda = e^{-\lambda} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$ mit der erzeugenden Funktion $GP_\lambda = e^{-\lambda} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot t^n = e^{\lambda(t-1)}$

Aus 2.2 galt für die Faltung der beiden Potenzreihen der Zusammenhang:

$$\left(a_{(t)} * b_{(t)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot t^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b \cdot t^n = [a \cdot b] \cdot \left[\frac{1}{1-t}\right] \cdot \left[\frac{1}{1-t}\right] = [a \cdot b] \cdot \frac{1}{(1-t)^2}$$

Eine Faltung von zwei Verteilungen bzw. allgemeiner von Funktionen - im oberen Fall die Gleichverteilungen a und b - ist also identisch mit der Multiplikation ihrer erzeugenden Funktionen. Da die Poissonverteilung im aktuellen Beispiel nur ein Anhängsel der Potenzreihe ist, muss für sie der gleiche Zusammenhang gelten.

$$\left(P_\mu * P_\lambda\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} \cdot e^{-\mu} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda} \quad \rightarrow \quad G\left(P_\mu * P_\lambda\right) = GP_\mu \cdot GP_\lambda = e^{\mu(t-1)} \cdot e^{\lambda(t-1)} = e^{(\mu+\lambda)[t-1]}$$

Hierbei fällt auf, dass $e^{(\mu+\lambda)(t-1)}$ wiederum die erzeugende Funktion einer anderen Poissonverteilung $P_{(\mu+\lambda)}$ ist. Damit ist beweisen, dass die Faltung zweier Poissonverteilungen wieder poissonverteilt ist, die Poissonverteilung also reproduktiv ist. Die Erwartungswerte der beiden Ursprungsverteilungen werden hierbei addiert.

$\left(P_\mu * P_\lambda\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu+\lambda)^n}{n!} \cdot e^{-(\mu+\lambda)}$ bzw. $\left(P_\mu * P_\lambda\right)(n) = \frac{(\mu+\lambda)^n}{n!} \cdot e^{-(\mu+\lambda)}$

Formal kann auch noch die Variable *t* wieder mit *t → 1* aus den erzeugenden Funktionen entfernt werden.

$$\lim_{t \to 1} \left[G\left(P_\mu * P_\lambda\right) = e^{\mu(t-1)} \cdot e^{\lambda(t-1)} = e^{(\mu+\lambda)[t-1]} \right] = \left(P_\mu * P_\lambda\right) = \underbrace{e^{\mu(1-1)}}_{=1} \cdot \underbrace{e^{\lambda(1-1)}}_{=1} = \underbrace{e^{(\mu+\lambda)[1-1]}}_{=1}$$

In diesem Fall resultiert aus dem Entfernen von *t* keine besonders wertvolle Aussage. Die Aussage ist nur, dass die gesamte Wahrscheinlichkeitsmasse der gefalteten Verteilung wieder 1 ist. Bei der Bestimmung des Erwartungswertes der Poissonverteilung wird das entfernen von *t* jedoch eine größere Bedeutung haben.

Die Reproduktivität gilt jedoch nicht bei jeder Faltung. Insbesondere nicht bei Faltungen unterschiedlicher Funktionen. Teilweise ist jedoch die entstehende dritte Funktion bereits bekannt und der Zusammenhang lässt sich über die einzeugende Funktion nachweisen. Ist all dies nicht möglich, kann aus der erzeugenden Funktion noch versucht werden eine Rekursionsvorschrift abzuleiten, was später unter Punkt 4. erläutert wird.

3.1 Erwartungswertbestimmung der Poissonverteilung über die EZF

Man betrachtet zunächst wieder die konvergente (*t < 1*) (Basis-)Potenzreihe mit

$$a_{(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

Der Vorfaktor a oder b kann hierbei unbeachtet bleiben, da nur eine einzelne Potenzreihe verwendet wird und daher keine Unterscheidung notwendig ist.

Die Aufgabenstellung ist nun den Erwartungswert der Potenzreihe zu bestimmen. Von einem Erwartungswert im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann jedoch nicht die Rede sein, da die Potenzreihe keine Wahrscheinlichkeitsverteilung darstellt. Es handelt sich daher zuerst einmal um eine Art Erwartungswert bezüglich der Zähldichte. Durch eine kleine Ergänzung kann jedoch auch die Potenzreihe zu einer Art Pseudo-Wahrscheilichkeitsverteilung gemacht werde, die gegen 1 konvergiert.

$$a_{(t)} = (1-t) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} t^n = 1$$

Diese Zwischendarstellung war jedoch nur zur Veranschaulichung. Im Folgenden wird nun wieder nur die (Basis-)Potenzreihe verwendet.

$$a_{(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

Um nun den Erwartungswert zu bestimmen, müssen nur alle Stellen der Funktion bzw. Reihe (*n´*s) mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit bzw. hier der Zähldichte an der Stelle *n* gewichtet werden. Damit erhält man:

$$E\left(a_{(t)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot t^n$$

Klammert man hier *t* aus, erhält man innerhalb der Summe die Ableitung der erzeugenden Funktion.

$E(a_{(t)}) = t \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot t^{n-1}$ *(Achtung nach dem Ausklammern von t beginnt n nun bei 1)*

Es handelt sich hier um eine gliedweise Ableitung d.h. es wurde zunächst nicht die Potenzreihe in ihrer geschlossenen Form abgeleitet, sondern es wurden alle Glieder der Summenschreibweise unter Anwendung der Potenzregel einzeln abgeleitet.

Da bereits gilt:

$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$ gilt damit auch: $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot t^{n-1} = \left(\frac{1}{1-t}\right)' = \frac{1}{(1-t)^2}$

Der komplette Weg der Umformung hier noch einmal zusammengefasst.

$$E(a_{(t)}) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot t^n = t \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot t^{n-1} = t \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right)' = t \cdot \left(\frac{1}{1-t}\right)' = \frac{t}{(1-t)^2}$$

Ableitungsregeln für gliedweise Ableitungen:

• konstante Funktion:	$(a)' = 0$
• Faktorregel:	$(a \cdot f)' = a \cdot f'$
• Summenregel:	$(g \pm h)' = g' \pm h'$
• Produktregel:	$(g \cdot h)' = g' \cdot h + g \cdot h'$
• Quotientenregel:	$\left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g' \cdot h - g \cdot h'}{h^2}$
• Potenzregel:	$(x^n)' = nx^{n-1}$

Der gesuchte quasi Erwartungswert, hier die „Zähldichtenerwartung" der Potenzreihe t^n, ist somit *t* (bzw. Exponentenbasis von *n*) mal die Ableitung ihres geschlossenen Funktionsausdrucks. Das Ergebnis ist sogar anschaulich erklärbar. Interpretiert man die Potenzreihe als erzeugende Funktion der Gleichverteilung *Σ 1* bin ins Unendliche, ist deren Zähldichtenerwartungswert ebenfalls unendlich. Entfernt man nun auch dieser erzeugenden Funktion für den Erwartungswert wieder das *t (t → 1)*, folgt formal eben genau die bereits gemachte Aussage aus der Anschauung.

$$\lim_{t \to 1} \frac{t}{(1-t)^2} = \infty$$

Die „Zähldichtenerwartung“ ist für die Anschaulichkeit nicht unbedingt förderlich. So beträgt diese bei t = 0,9 nach dem Einsetzen in die Formel 90. Einen Erwartungswert würde man bei einer grafischen Darstellung der Potenzreihe jedoch eher bei 9 erwarten. Grund ist hierfür, dass die Potenzreihe gegen 10 konvergiert. Um diese zur einer auf 1 normierten Wahrscheinlichkeitsverteilung umzuformen, ist jedes Glied mit (1-t) zu multiplizieren – im Beispiel also 0,1. Damit wäre der „anschauliche Erwartungswert“ auch bei 9.

Nun gilt es diese Erkenntnis auf die Poissonverteilung zu übertragen.

Die Potenzreihe $a_{(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ wird nun also durch $GP_\mu = e^{-\mu} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} \cdot t^n = e^{\mu(t-1)}$ ersetzt.

Den Erwahrungswert berechnet man daher mit der Funktion $E(GP_\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{\mu^n}{n!} \cdot e^{-\mu} \cdot t^n$

Dieser Ansatz zur Erwartungswertbestimmung, der alle Glieder nochmals mit *n* multipliziert, ist bei Kenntnis der erzeugenden Funktion aber überhaupt nicht mehr nötig. Es geht viel einfacher indem man die Vorgehensweise aus der Potenzreihe formal auf die erzeugende Funktion anwendet.

$$GP_\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} \cdot e^{-\mu} \cdot t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu \cdot t)^n}{n!} \cdot e^{-\mu} = e^{\mu(t-1)}$$

Zunächst klammert man die Basis des Exponenten *n* aus der Summe aus. Über die Veränderungen der einzelnen Glieder in der Summe muss man sich an dieser Stelle überhaupt keine Gedanken mehr machen, da aus der allgemeinen Variante mit der Potenzreihe bekannt ist, dass die Summe durch das Ausklammern zu ihrer eigenen Ableitung wird.

$$E(GP_\mu) = (\mu \cdot t) \cdot \left(e^{\mu(t-1)}\right)'$$

Da zudem bei diesem Spezialfall mit der Poissonverteilung die Summe eine e-Funktion ist, ist sie ihre eigene Ableitung.

$E(GP_\mu) = (\mu \cdot t) \cdot e^{\mu(t-1)}$ es gilt: $\left(e^{\mu(t-1)}\right)' = e^{\mu(t-1)}$

Nun ist der Erwartungswert von GP_μ bekannt, was aber noch nicht die gesuchte Lösung ist. Zum Schluss muss noch das *t* „entfernt“ werden. Dies geschieht wieder indem man *t* gegen 1 gehen lässt.

$$\lim_{t \to 1} \left[E(GP_\mu) = \underbrace{(\mu \cdot t)}_{\to \mu} \cdot \underbrace{e^{\mu(t-1)}}_{\to e^0 = 1} \right] = E(P_\mu) = \mu$$

Damit ist über die erzeugende Funktion bewiesen, dass der Parameter *μ* der Poissonverteilung gleichzeitig deren Erwartungswert ist.

3.2 Varianzbestimmung der Poissonverteilung über die EZF

Man betrachtet zunächst wieder die konvergente (*t < 1*) (Basis-)Potenzreihe mit

$$a_{(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

Für diese gelten die gleichen Aussagen wie schon unter Punkt 3.1 bei der Bestimmung des Erwartungswertes.

Für die Bestimmung der Varianz der Reihe ermittelt man diese zunächst einzeln für jedes Summenglied. Eine Einzelvarianz für eines der *n* Summenglieder ist somit:

$$V\left(a_{(t)}\right)_{(n)} = \left(n - E\left(t^n\right)\right)^2$$

Hierbei ist es zur Veranschaulichung besonders wichtig zu wissen, dass die Varianz einer Funktion der Erwartungswert der quadrierten Differenzen der Funktionswerte zum Erwartungswert der Funktion ist – als eine Art erwarteter bzw. mittlerer Abweichung. Bei einer Wahrscheinlichkeitsverteilung würden diese Einzelvarianzen nun mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ihres Auftretens gewichtet. Da aber zunächst die Betrachtung mittels einer Potenzreihe durchgeführt wird, werden die Einzelvarianzen zunächst wieder an den t^n ´s aufgehängt. Damit lautet der Ansatz für die gesamte Funktion:

$$V\left(a_{(t)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n - E\left(t^n\right)\right)^2 \cdot t^n$$

Es gilt weiterhin: $E\left(t^n\right) = t \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right)'$

Durch Ausmultiplizieren der quadrierten Klammer ergibt sich:

$$V\left(a_{(t)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n - E\left(t^n\right)\right)^2 \cdot t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n^2 + E\left(t^n\right)^2 - 2nE\left(t^n\right)\right) \cdot t^n$$

$$V\left(a_{(t)}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2-2nE\left(t^n\right)+E\left(t^n\right)^2\right)\cdot t^n=\sum_{n=0}^{\infty}n^2\cdot t^n-2nE\left(t^n\right)\cdot t^n+E\left(t^n\right)^2\cdot t^n$$

Aus dem mittleren Summanden ist nun erkennbar, dass hier wieder ein Erwartungswert „versteckt“ ist.

$$V\left(a_{(t)}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}n^2\cdot t^n-2E\left(t^n\right)\cdot\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot t^n}_{E\left(t^n\right)}+E\left(t^n\right)^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}t^n$$

$$V\left(a_{(t)}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}n^2\cdot t^n-2E\left(t^n\right)^2+E\left(t^n\right)^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}t^n$$

Damit ist bei den letzten beiden Summanden ein Ausklammern des quadrierten Erwartungswertes möglich. Der Teil in der Klammer (2 – Potenzreihe) ist zudem bei Wahrscheinlichkeitsverteilungen immer 1, wird aber weiter so mitgeführt.

$$V\left(a_{(t)}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}n^2\cdot t^n-E\left(t^n\right)^2\left(2-\sum_{n=0}^{\infty}t^n\right)$$

Um nun die Summe gegen n^2 zu bestimmen, wird n^2 durch *(n(n-1)+n)* substituiert.

$$V\left(a_{(t)}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n(n-1)+n\right)\cdot t^n-E\left(t^n\right)^2\left(2-\sum_{n=0}^{\infty}t^n\right)$$

Dadurch kann die Summe gegen n^2 durch zwei Summen in Form von Ableitungen der Potenzreihe dargestellt werden.

$$V\left(a_{(t)}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)\cdot t^n+\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot t^n-E\left(t^n\right)^2\left(2-\sum_{n=0}^{\infty}t^n\right)$$

$$V\left(a_{(t)}\right)=t^2\cdot\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\cdot t^{n-2}}_{\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^n\right)''}+\underbrace{t\cdot\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot t^{n-1}}_{\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^n\right)'}}_{E\left(t^n\right)}-E\left(t^n\right)^2\left(2-\sum_{n=0}^{\infty}t^n\right)$$

Anschaulich bedeutet die vorherige Formel auf Basis der erzeugenden Funktion:

- t^2 multipliziert mit der zweiten Ableitung
- + *t* multipliziert mit der ersten Ableitung
- - Erwartungswert zum Quadrat was gleichzusetzen ist mit:
  - *t* multipliziert mit der ersten Ableitung zum Quadrat
- *Das „addon" (2-erzeugende Funktion) kann hier vernachlässigt werden, da es bei Wahrscheinlichkeitsverteilungen nach dem Entfernen von t (t→1) immer gegen 1 konvergiert.*
  - *Eventuell müsste eine Beachtung erfolgen, wenn eine Verteilung aus mehreren Einzelfunktionen zusammengesetzt wäre, die dann nicht gegen 1 konvergieren. Dies wurde jedoch hier nicht weiter untersucht.*

Nun gilt es diese Erkenntnis wieder auf die Poissonverteilung zu übertragen.

Die Potenzreihe $a_{(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ wird dazu durch $GP_\mu = e^{-\mu} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} \cdot t^n = e^{\mu(t-1)}$ ersetzt.

Die Varianz berechnet man daher mit der Funktion

$$V(GP_\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} (n - E(GP_\mu))^2 \cdot \frac{\mu^n}{n!} \cdot e^{-\mu} \cdot t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n - E(GP_\mu))^2 \cdot \frac{(\mu \cdot t)^n}{n!} \cdot e^{-\mu}$$

Das bereits mit der Potenzreihe durchgeführte Ausmultiplizieren der Klammer ergibt hierbei folgende Schreibweise

$$V(GP_\mu) = (\mu \cdot t)^2 \cdot \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\mu \cdot t)^{n-2}}{(n-2)!} \cdot e^{-\mu}}_{=\left(e^{\mu(t-1)}\right)''} + (\mu \cdot t) \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu \cdot t)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-\mu}}_{=\left(e^{\mu(t-1)}\right)'} - \underbrace{E(GP_\mu)}_{(\mu \cdot t) \cdot e^{\mu(t-1)}}^2 \cdot \underbrace{\left(2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\mu \cdot t)^n}{n!} \cdot e^{-\mu}\right)}_{=2-e^{\mu(t-1)}}$$

$$V(GP_\mu) = (\mu \cdot t)^2 \cdot \left(e^{\mu(t-1)}\right)'' + (\mu \cdot t) \cdot \left(e^{\mu(t-1)}\right)' - \left((\mu \cdot t) \cdot e^{\mu(t-1)}\right)^2 \cdot \left(2 - e^{\mu(t-1)}\right)$$

es gilt: $\left(e^{\mu(t-1)}\right)'' = \left(e^{\mu(t-1)}\right)' = e^{\mu(t-1)}$; $E(GP_\mu) = (\mu \cdot t) \cdot e^{\mu(t-1)}$

$$\lim_{t \to 1} \left[V\left(GP_{\mu}\right) = \underbrace{(\mu \cdot t)^2 \cdot \left(e^{\mu(t-1)}\right)''}_{=\mu^2} + \underbrace{(\mu \cdot t) \cdot \left(e^{\mu(t-1)}\right)'}_{=\mu} - \underbrace{\left((\mu \cdot t) \cdot e^{\mu(t-1)}\right)^2}_{=\mu^2} \cdot \underbrace{\left(2 - e^{\mu(t-1)}\right)}_{=1} \right] = V\left(P_{\mu}\right) = \mu$$

<u>Damit ist über die erzeugende Funktion bewiesen, dass der Parameter μ der Poissonverteilung gleichzeitig deren Varianz ist.</u>