Finanzmathematische Grundlagen zur Zins- und Rentenrechnung

(Fassung - November 2008)

Markus Schieche

Email: mail@markus-schieche.de
Homepage: www.markus-schieche.de

Vorwort

Dieser Text stellt eine Sammlung meiner Notizen zur Zins- und Rentenrechnung dar und wird in unregelmäßigen Abständen aktualisiert. Tipps und Anregungen nehme ich gerne entgegen.

Vorab soll kurz auf ein häufiges Missverständnis über Konditionen von Geldanlagen und Kredit- oder Geldaufnahmen eingegangen werden. Als Privatperson kennt man für Geldanlagen meist Zinssätze zwischen 1 % und 5 %. Der Zinssatz für eine kurzfristige Geldaufnahme (Dispo-Kredit) liegt meist gute 10 % darüber. Diesen Zusammenhang sollte man für den folgenden Text komplett beiseite legen. Hier sind die Marktteilnehmer keine Privatpersonen, sondern Staaten, Banken und Unternehmen zweifelsfreier Bonität. Auch werden mit mindestens 1 Mio. € aufwärts deutlich höhere Volumina gehandelt. Liegt hier der Zinssatz für eine einjährige Geldanlage beispielsweise bei 5,00 %, so liegt der für eine Geldaufnahme bei 5,10 % und beinhaltet damit nur eine sehr geringe Handelsspanne. Da dieser Unterschied so gering ausfällt, wird zur weiteren Vereinfachung davon ausgegangen, dass die Zinssätze für Geldanlage und Geldaufnahme identisch sind (abitragefreier Markt).

Ergänzung November 2008:

Die Finanzkrise der Jahre 2007 und 2008 hat auch vor der soeben gemachten Annahme nicht halt gemacht. Teilweise liegen nun auch für Banken die Zinssätze für Geldaufnahme und Geldanlage weiter auseinander. Stellenweise ist es sogar so, dass eine Geldaufnahme zeitweise überhaupt nicht mehr möglich ist. Die gemachte Annahme des *abitragefreien Markte*s wird daher dennoch aufrechterhalten, da die Zins- und Rentenrechnung letztlich davon ausgehen muss, dass ein geregelter Markt vorhanden ist; andernfalls sind alle nachfolgend gemachten Aussagen ohnehin gegenstandslos. Auch wird hier ein theoretisches Konzept behandelt, das für die Praxis erst noch entsprechend noch anzupassen ist.

Inhalt

Der Begriff **strukturkongruente Refinanzierung™** ist ein eingetragenes Warenzeichen der Gillardon AG

1. Einfache Zins- und Rentenrechnung bei konstantem Zins

Das einfachste Umfeld für die Zins- und Rentenrechnung ist ein Markt mit einem einzigen Zins[1] für alle Laufzeiten. Das bedeutet, dass beispielsweise für eine einjährige Geldanlage der gleiche Zins gezahlt wird wie für eine fünfjährige Geldanlage. Durch die Annahme, dass ein Zins für alle Laufzeiten gilt, stellt dieser Markt einen Spezialfall dar, in dem Zinsen und Renditen identisch sind. Der Unterschied dieser beiden Bezeichnungen wird unter Abschnitt 2. noch genauer dargestellt. Weiterhin existieren keine Geld- / Briefspannen, weshalb zu ein und demselben Zins Geld sowohl angelegt als auch aufgenommen[2] werden kann. Für die ersten Beispiele sollen zunächst auch nur ganzjährige Laufzeiten der Geschäfte möglich sein.

Definierte Variablen:

BW	= Barwert eines Zahlungsstroms zum heutigen Zeitpunkt ($t=0$) Auch als EW_0 oder K bezeichnet.
EW_t	= Endwert eines Zahlungsstroms zum Zeitpunkt t
i	= Zinssatz (interest rate) in dezimaler Schreibweise 6 % = i = 0,06
t	= Zeit in Anzahl der Perioden (Jahre) bei Anfall der Zahlung

[1] Ein Beispiel aus der Praxis hierfür ist die Berechnung der steuerlich zulässigen Pensionsrückstellung nach §6a EStG.
[2] Es existieren keinen Adressrisiken – alle Schuldner haben eine zweifelsfreie Bonität.

1.1. Aufzinsung und Abzinsung einer Zahlung

Eine beispielhafte Geldanlage von *K =100 €* zu *i = 6 %= 0,06* führt nach *t=1* Jahr somit zu einem Endwert EW_1 *= 106 €*. Die Formel hierzu lautet:

$$EW_1 = K \cdot (1+i) \qquad\qquad 106\ € = 100\ € \cdot (1+0{,}06)$$

Diese Berechnung des Endwertes nennt man auch <u>Aufzinsung</u>. Mittels eines einfachen Dreisatzes bzw. Umformung nach *K* gelangt man zur Umkehrfunktion – der <u>Abzinsung</u>.

$$EW_1 = K \cdot (1+i) \quad \Rightarrow \quad K = EW_1 \cdot \frac{1}{(1+i)}$$

Man kann hiermit nun berechnen wie viel Kapital man heute anlegen muss, um nach einem Jahr ein gewünschtes Endkapital zu erhalten. Eine weitere Beschreibung ist, dass man mit der Abzinsung berechnet was der Endwert *EW* denn heute wert wäre bzw. ist. Hier spricht man auch vom Barwert. Daher wird die Variable des heutigen Kapitals *K* im Folgenden auch durch *BW* für den Barwert ersetzt.

Die nächste Fragestellung bezieht sich nun auf mehrjährige Laufzeiten. Hierzu wendet man die Formeln für Auf- und Abzinsung einfach mehrmals an. Der Endwert, den man nach einer einjährigen Aufzinsung erhält, setzt man nun als neuen Start-Barwert nochmals in die Formel ein. Im Fall einer dreijährigen Laufzeit stellt sich dies wie folgt dar.

$$EW_1 = BW \cdot (1+i) \qquad EW_2 = EW_1 \cdot (1+i) \qquad EW_3 = EW_2 \cdot (1+i)$$

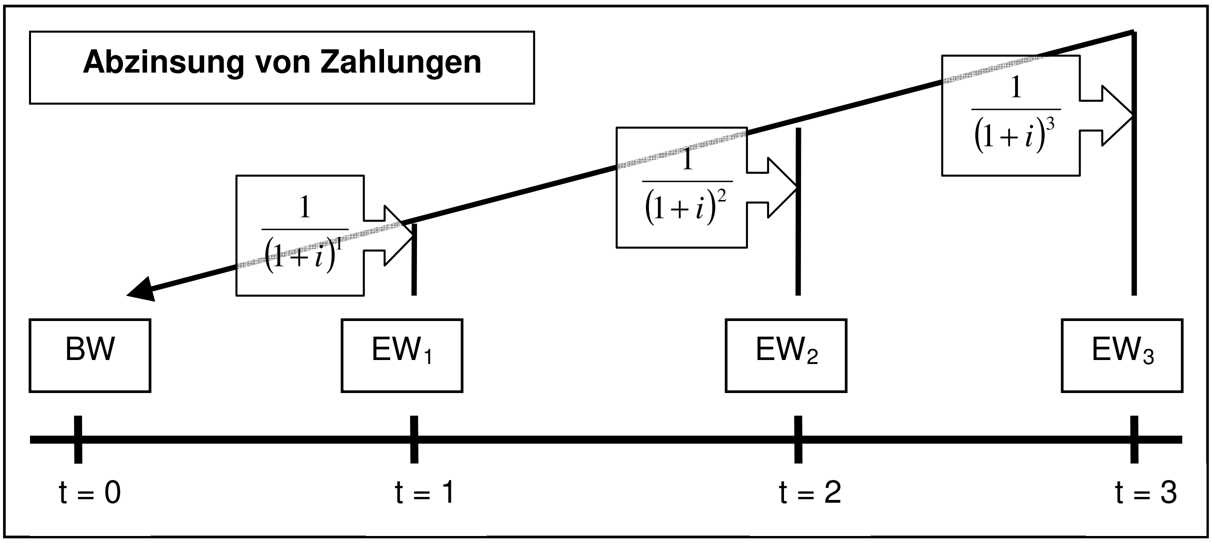
$$\Rightarrow \quad EW_3 = BW \cdot (1+i) \cdot (1+i) \cdot (1+i) = BW \cdot (1+i)^3$$

Mit dieser Vorgehensweise unterstellt man, dass Zinsen nicht ausgezahlt werden, sondern dem Kapital hinzugerechnet und mitverzinst werden. Für die aktuelle Marktumgebung mit nur einem Zinssatz ist es jedoch egal ob die Zinsen ausgezahlt werden, da wieder zum gleichen Zins angelegt werden können.

Für den allgemeinen Fall mit einer Laufzeit von *t* Jahren gilt daher:

$EW_t = BW \cdot (1+i)^t$ für die Aufzinsung und $BW = EW_t \cdot \frac{1}{(1+i)^t}$ für die Abzinsung.

Bei gebrochenen Laufzeiten liegt es nahe für die Variable *t* nicht ausschließlich ganze Zahlen sondern auch gebrochene Jahre wie *t=1,25* für 1¼ Jahr zuzulassen. Diese Vorgehensweise ist im Allgemeinen auch praktikabel und wird im Folgenden auch verwendet. Bei der tatsächlichen Bewertung von Geld- und Kapitalmarktinstrumenten unterstellt man hiermit jedoch eine Zinskonvention, die in der Regel in der Praxis aber kaum auftritt. Denn die Zinsen würden bei der eben angewendeten „kontinuierlichen Verzinsung" quasi täglich[3] ermittelt, dem Kapital zugerechnet und am Folgetag mitverzinst. Diese für alle Marktteilnehmer transparente und faire Zinskonvention wäre im heutigen Zeitalter mittels EDV auch problemlos realisierbar. In der Praxis haben sich aus der Vergangenheit jedoch Zinskonventionen (monatlich, quartalsweise etc.) entwickelt, die besser für eine manuelle Berechnung geeignet sind.



* Grafische Darstellung der Abzinsung

[3] Genau genommen bedeutet stetig, dass für jede beliebig kleine Zeiteinheit (*Δt→0)* eine Verzinsung ermittelt wird bzw. werden kann.

1.2. Abzinsung einer Zahlungsreihe (Rentenbarwertfaktor)

Handelt es sich nicht mehr um eine einzelne Zahlung, sondern um mehrere Zahlungen, spricht man von einer Zahlungsreihe. In der Praxis geht es beispielsweise um die Fragestellung welches Kapital für eine wiederkehrende Rentenzahlung heute nötig ist. Hier ist es ebenfalls möglich diese mittels einer einfachen Formel auf- oder abzuzinsen. Als Prämisse gilt hierbei, dass die laufenden Zahlungen Z gleich hoch (uniform) sind und gleichmäßig (äquidistant) anfallen. Ob dies am Periodenende (nachschüssig) geschieht oder am Periodenanfang (vorschüssig), kann durch eine kleine Variation der Formel dargestellt werden.

Zusammenfassung definierten Variablen:

Zusätzlich zur Auf- und Abzinsung werden noch die folgenden Variablen verwendet.

n = Anzahl der Zahlungen.

Im Exkurs zur geometrischen Reihe werden folgende Variablen verwendet.

R_n = Reihe R mit n Elementen.
g_n = geometrische Reihe g mit n Elementen.
k = allgemeine Zählvariable / Index
q = Basiselement der geometrischen Reihe

Das Basiselement q steht hier zur besseren Übersicht je nach Anwendung für den Abzinsungs- oder den Aufzinsungsfaktor.

$q = (1 + i)$ bzw. $q = \frac{1}{(1+i)}$

Die <u>Abzinsung einer Zahlungsreihe</u> erfolgt indem man jede Zahlung Z entsprechend ihres Zahlungszeitpunktes t auf den heutigen Tag $t=0$ abzinst. Auf eine Indexierung von Z mit t wurde verzichtet, da alle Zahlungen definitionsgemäß bis auf den Zeitpunkt gleich sind.

Der Ansatz hierfür lautet:

$$BW = \sum_{t=1}^{n} Z \cdot \frac{1}{(1+i)^t} = Z \cdot \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^t} = Z \cdot \frac{1}{(1+i)^1} + Z \cdot \frac{1}{(1+i)^2} + ... + Z \cdot \frac{1}{(1+i)^t}$$

Zur besseren Übersicht wird mit *Z=1* gerechnet. Den Barwert *BW* für eine Basis-Geldeinheit nennt man auch nachschüssigen Rentenbarwertfaktor $RBWF_{nachschüssig}$.

$$RBWF_{nachschüssig} = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^t} = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^t} = \frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + ... + \frac{1}{(1+i)^t}$$

Um die obere Rehe weiter zu vereinfachen ist zunächst das Ergebnis aus dem folgenden Exkurs zur geometrischen Reihe notwendig.

Exkurs zur geometrischen Reihe:

Eine Reihe in Form von…

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = q^1 + q^2 + q^3 + ... + q^n$$

…lässt sich vereinfachen indem man zuerst den Faktor q ausklammert.

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = q \cdot \sum_{k=0}^{n-1} q^k = q \cdot \left(1 + q^1 + q^2 + ... + q^{n-1}\right)$$

Bei der Reihe in der oberen Klammer handelt es sich um eine geometrische Reihe.

$$g_{n-1} = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1}$$

Von dieser Reihe wird ihre Multiplikation mit *q* nun wieder subtrahiert.

$$-q \cdot g_{n-1} = -q - q^2 - ... - q^{n-1} - q^n$$

Hierbei heben sich bis auf Anfang und Ende der Reihe alle Elemente auf.

$$g_{n-1} - q \cdot g_{n-1} = 1 + q - q + q^2 - q^2 + ... + q^{n-1} - q^{n-1} - q^n = 1 - q^n$$

Durch Ausklammern von g_{n-1} erhält man:

$g_{n-1} \cdot (1-q) = 1 - q^n$ und $g_{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$

Setzt man dieses Ergebnis nun wieder in die ursprüngliche Reihe ein erhält man.

$$R_{n\ (nachschüssig)} = \sum_{k=1}^{n} q^k = q \cdot \sum_{k=0}^{n-1} q^k = q \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Das Ergebnis gilt für die Reihe einer nachschüssigen Zahlung.

Für die Reihe der vorschüssigen Zahlung muss der gesamte Zahlungsstrom nur um „ein q“ nach vorne verschoben werden, da die erste Zahlung hier nicht abgezinst wird. Dies geschieht einfach indem man den Faktor vor dem Bruch q durch 1 ersetzt bzw. weglässt.

$$R_{n\ (vorschüssig)} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$$

Das Ergebnis aus dem vorherigen Exkurs lässt sich nun verwenden, wenn man folgende Zuordnung für den einperiodigen Abzinsungsfaktor vornimmt und

$q = \frac{1}{1+i}$ in $R_{n\ (nachschüssig)} = q \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$ einsetzt.

Dadurch erhält man bei einer nachschüssigen Zahlung / Rente den Formelansatz:

$$RBWF_{nachschüssig} = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^t} = \frac{1}{(1+i)} \cdot \frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{1-\frac{1}{(1+i)}}$$

Zwischenschritt: $\frac{1}{(1+i)} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{(1+i)}} = \frac{1}{(1+i)\cdot\left(1-\frac{1}{(1+i)}\right)} = \frac{1}{(1+i)-\frac{(1+i)}{(1+i)}} = \frac{1}{(1+i)-1} = \frac{1}{i}$

$$RBWF_{nachschüssig} = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^t} = \frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i} = \frac{1}{i} - \frac{\frac{1}{(1+i)^n}}{i} = \frac{1}{i} - \frac{1}{(1+i)^n \cdot i} = \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n \cdot i} - \frac{1}{(1+i)^n \cdot i} = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}$$

Der Schritt vom vor- zum nachschüssigen Rentenbarwertfaktor erfolgt ähnlich wie beim Exkurs zur geometrischen Reihe. Da nun in der Ausgangsformel kein

Abzinsungs-Vorfaktor zum Streichen mehr zur Verfügung steht, wird der nachschüssige Rentenbarwertfaktor stattdessen für eine Periode aufgezinst.

$$RBWF_{vorschüssig} = (1+i) \cdot RBWF_{nachschüssig} = (1+i) \cdot \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^n} = \sum_{t=0}^{n} \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}$$

Zusammenfassend gilt:

$\Rightarrow RBWF_{nachschüssig} = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^t} = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}$ nachschüssiger Rentenbarwertfaktor

$\Rightarrow RBWF_{vorschüssig} = \sum_{t=0}^{n} \frac{1}{(1+i)^t} = (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}$ vorschüssiger Rentenbarwertfaktor

1.3. Aufzinsung einer Zahlungsreihe (Rentenendwertfaktor)

Nun soll nicht der Barwert einer wiederkehrenden Zahlung zum heutigen Zeitpunkt bestimmt werden, sondern deren Endwert in der Zukunft. In der Praxis tritt diese Fragestellung auf, wenn das Endkapital eines regelmäßig eingezahlten Betrages ermittelt werden soll. Beispiele sind die Berechnung des Anlageerfolgs von Bank-, Bausparverträgen und Lebensversicherungen[4].

Mit einem kleinen Trick lässt sich die Formel bereits aus der für die abgezinste Zahlungsreihe ableiten. Mit dem Rentenbarwertfaktor wird bereits die gesamte Zahlungsreihe zu einer einzigen Zahlung am heutigen Tag, dem Barwert, zusammengefasst. Diese seine Zahlung müsste man daher eigentlich nur zusätzlich zum Entwertzeitpunkt aufzinsen.

Bereits bekannt ist:

$$RBWF_{nachschüssig} = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \quad \text{und} \qquad EW_t = BW \cdot (1+i)^t$$

[4] Das Todesfallrisiko wird in diesem Beispiel vernachlässigt.

Die beschriebene Vorgehenswiese bedeutet nun den *$RBWF_{nachschüssig}$ = BW* zu setzen und an erhält die Formel, die ebenso für vorschüssige Zahlungen ermittelt werden kann.

$$EW_t = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \cdot (1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

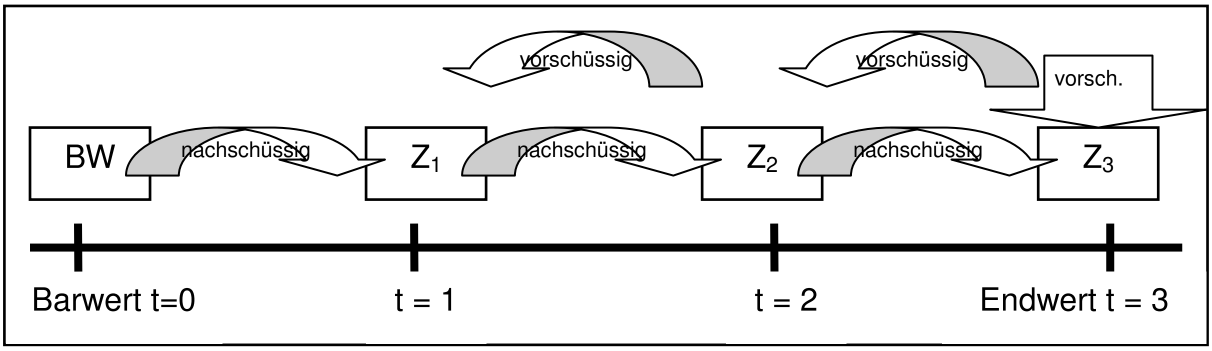
Der Rentenendwertfaktor lässt sich selbstverständlich auch, wie den Rentenbarwertfaktor, über die geometrische Reihe berechnen. Hierzu setzt man in die Variable *q* den Faktor für die einfache Aufzinsung *(1+i)* ein.

$q = 1 + i$ in $R_{n\ (vorschüssig)} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \dfrac{1-q^n}{1-q}$ eingesetzt

<u>Achtung:</u> Durch das einsetzen in $R_{n\ (nachschüssig)}$ würde man durch den Standpunktwechsel den vorschüssigen Rentenendwertfaktor erhalten. Dies lässt sich erklären, da die die aus Sicht des Barwerts (*t=0*) nachschüssigen Zahlungen aus Sicht des Endwerts nun vorschüssig sind. So wird die letzte nachschüssige Zahlung mit $1 / (1+i)^t$ abgezinst. Aus Sicht des Endwertes fällt sie jedoch genau im Endwert an Eine Aufzinsung (mit Faktor 1) findet hier nicht mehr statt – also vorschüssig aus Sicht des Endwertes.

$$REWF_{vorschüssig} = (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Die Folgende Grafik stellt nochmals den Wechsel von nachschüssiger Zahlung in vorschüssige Zahlung dar. Die Zahlungen Z_{1-3} sind aus Sicht des Barwerts nachschüssig, aber vorschüssig aus Sicht des Endwerts. Die Bezeichnung der Zahlung erfolgt jedoch stets aus heutiger Sicht (erste Zahlung sofort oder nach einer Periode) – der des Barwertes, also nachschüssig. Die Einsetzung von q in R_n erfolgt aus Sicht des Endwertes - also in das vorschüssige R_n.



* Darstellung des Wechsels der Betrachtungsweise von nachschüssig in vorschüssig.

Zusammenfassend gilt:

$$\Rightarrow REWF_{nachschüssig} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$ nachschüssiger Rentenendwertfaktor

$$\Rightarrow REWF_{vorschüssig} = (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$ vorschüssiger Rentenendwertfaktor

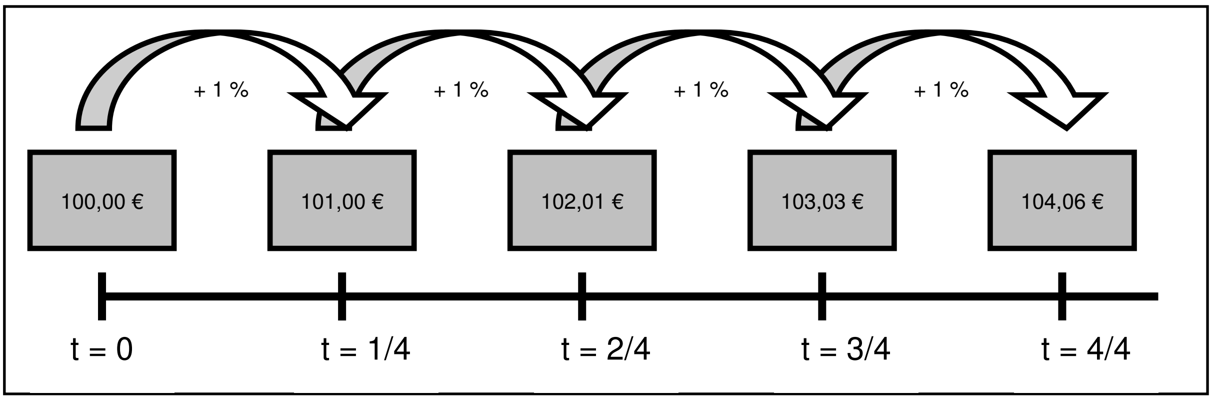
1.4. Nominal- und Effektivzins

Auf den ersten Blick erscheint die Angabe eines Zinssatzes von z.B. 4 % p.a. eindeutig. Bei diesem Zins handelt es sich auf jeden Fall um den Nominalzins. Sind die Zinsen jährlich, nachschüssig zu zahlen ist dies ebenfalls der Effektivzins. Nun werden Rechnungsabschlüsse von Bankkonten in der Regel quartalsweise erstellt. Das erste Viertel der Zinsen ist nun z.B. schon deutlich früher zu entrichten. Man könnte sagen, dass sich hierdurch der Zins schon etwas teuer „anfühlt“. Um eine Vergleichbarkeit Zinssätze unter Berücksichtigung der Stellschraube des Rechnungsabschlusses herbeizuführen, existiert der Effektivzins. Bei einem Nominalzins von 4 % und quartalsweisen Rechnungsabschlüssen bzw. Kapitalisierungen[5] ist damit für jedes Quartal ein Zins von 1 % zu zahlen. Diesen Zins lässt man auf dem Konto stehen und daher werden diese 1 % zusätzlich noch mitverzinst. Betrachtet man die vier Quartale als vier dimensionslose Perioden kann man das Ergebnis aus diesem Konto über die Aufzinsungsformel aus 1.1. ermitteln.

$$EW_t = BW \cdot \left(1 + \frac{i_{nominal}}{4}\right)^4$$

$$i_{effektiv} = \frac{EW_t}{BW} - 1 = \left(1 + \frac{i_{nominal}}{4}\right)^4 - 1$$

Man erhält mit der oberen Formel einen Effektivzins von 4,06 %. Um diesen Faktor wächst das Kapital durch die mehrmalige Kapitalisierung innerhalb eines Jahres an.



[5] Der Zins wird dem Kapital zugeschlagen und von dann an mitverzinst.

Wie man selbst mit verschiedenen Schrittweiten feststellen kann steigt der Effektivzins sogar mit häufigeren Kapitalisierungsterminen noch weiter an. Es läge für den Geldgeber daher nahe seine Zinsen unendlich oft im Jahr zu kapitalisieren. Dem schiebt jedoch bereits die Mathematik einen Riegel vor. Der Effektivzins steigt zwar mit häufigeren Kapitalisierungen, zeigt allerdings eine Konvergenz, die eine obere Grenze darstellt. Für unendliche Kapitalisierungen gilt – ohne genauer auf die Eulersche Zahl e ≈ 2,718 einzugehen:

$$\lim_{n \to \infty} = \left(1 + \frac{i_{no\min al}}{n}\right)^n = e^{i_{no\min al}}$$

Verzinsungsarten mit endlichen Kapitalisierungen bezeichnet man als <u>diskrete Verzinsung</u>, da die Funktion zwischen den Zeitpunkten auch nicht definiert ist. Den Grenzfall mit unendlichen Kapitalisierungen nennt man daher <u>kontinuierliche oder auch stetige Verzinsung</u>, da für jeden beliebigen Zeitpunkt die Kapitalentwicklung (Effektivzins) definiert ist. Die Beschränkung des Wertebereichs auf n bzw. 1 soll nur ausdrücken, dass es sich um den Bereich innerhalb einer Periode handelt und ist im allgemeinen Fall nicht notwendig.

diskrete Verzinsung: $i_{effektiv}(t) = \left(1 + \frac{i_{no\min al}}{n}\right)^t \qquad t \le n \qquad t \in N$

stetige Verzinsung: $i_{effektiv}(t) = e^{(i_{no\min al} \cdot t)} \qquad t \le 1 \qquad t \in R$

Die stetige Verzinsung tritt in der Markt-Praxis nicht auf. Benötigt wird sie jedoch z.B. für die Bewertung von Finanzderivaten, wie dem Black & Scholes[6] bzw. Black76 Modell zur Optionspreisbewertung, da hier oft mit stetigen Verteilungen gearbeitet wird, die einen stetigen Verzinsungsverlauf ohne Definitionslücken benötigen.

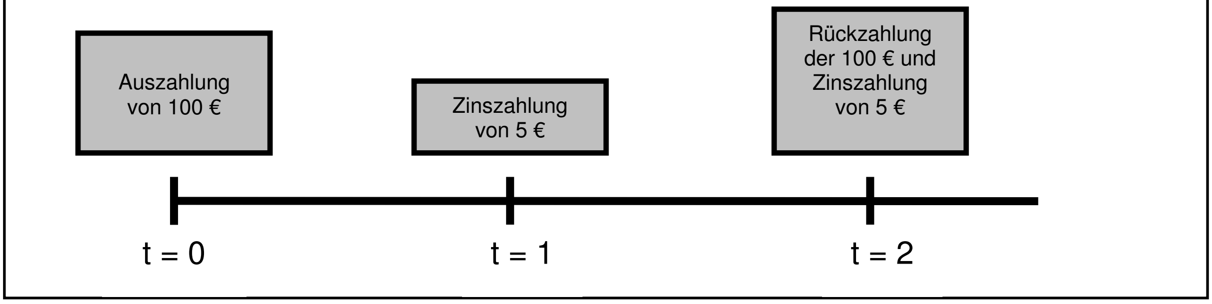
[6] Black, F. and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy* 81, No. 3 (May-June 1973), pp. 637-654.
Merton, R.C., "The Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, No. 1(Spring 1973), pp. 141-183.

2. Zinsen und Renditen

Der Unterschied zwischen und Zinsen und Renditen erscheint zunächst trivial. Im Zusammenhang mit Zinsen spricht man oft auch von einer laufenden Verzinsung – bei Renditen ist im Gegensatz hierzu oft von einer Verfallrendite die Rede. Um den Unterschied im Folgenden anschaulich herauszuarbeiten, wird zuerst auf Beispiele aus den Anfängen des Geldverleihens eingegangen. Hierbei sei vorab bemerkt, dass die Bonität des Schuldners einwandfrei ist. Der Preis, der für den Zeitraum des Verleihens verlangt wird, ist somit nur eine Vergütung für den eigentlichen Verzicht auf das Kapital.

2.1. Der Zins

Der Ansatz den ein Zins verfolgt, ist der, dass für das Überlassen eines Geldbetrags eine periodische Gebühr während der Überlassung verlangt wird. Für das Verleihen von 100 € werden beispielsweise 5 € an „Gebühr" pro Jahr fällig, die jeweils am Ende eines jeden Jahres oder bei vorheriger Fälligkeit des Kapitals zu zahlen sind. Hier spricht man auch von einer laufenden Verzinsung bzw. einem Zins von 5,00 % p.a. auf den Kapitalbetrag Diese Kapitalmarktusance ist besonders im europäischen Raum weit verbreitet. Aufgrund der wiederkehrenden Zahlung spricht man bei dem Zins auch von einer Rente – ähnlich einer Altersrente oder Pension. Das Marktumfeld in dem mit solchen verzinsten Forderungen[7] gehandelt wird, wird daher auch Rentenmarkt genannt.



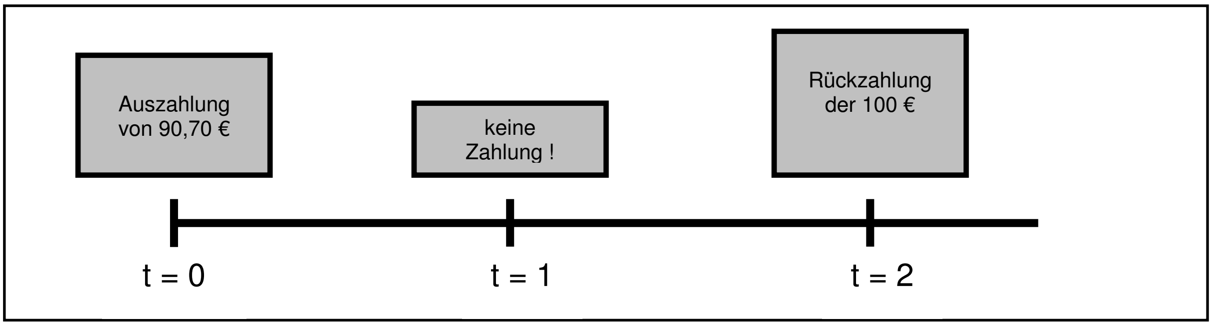
* Darstellung der Zahlungsströme (Cash-Flows) bei einem verzinsten Geldverleih.

[7] Gemeint sind hier Anleihen und Schuldverschreibungen, also verbriefte Geldforderungen, die damit nicht mehr beim Erstkreditgewährenden verbleiben müssen, sondern von diesem weiterverkauft werden können.

2.2. Die Rendite

Ein anderer Ansatz führt zunächst über einen Diskont[8]. Der Schuldner geht heute eine Verpflichtung für die Zukunft ein und erhält dafür heute einen Geldbetrag ausgezahlt, der bereits um alle während der Laufzeit anfallenden Gebühren gekürzt wurde. Somit sind bis zur Fälligkeit keine weitern Zahlungen zu leisten. Für die Verpflichtung in zwei Jahren 100 € zurückzuzahlen zahlt ein Geldverleiher z.B. heute 90,70 € (Abzinsungsfaktor für 2 Jahre 90,70 %) aus. Diese Kapitalmarktusance ist besonders im englischsprachigen Raum weit verbreitet. Da diese Forderungen bis zur Fälligkeit keine Zahlungen zur Folge haben, spricht man hier auch von Zerobonds (Nullkuponanleihen). Um die Gebühr des Diskont-Geldverleihers mit der des Zins-Geldverleihers zu vergleichen, rechnet man mittels der umgeformten Abzinsungsformal aus 1.1 die Variable *i* aus, die man aufgrund des Ursprungs aus einem Diskont-Geschäft nun nicht Zins sondern Rendite nennt.

$K = EW \cdot \frac{1}{(1+i)^t} = i = \sqrt[t]{\frac{EW_t}{K}} - 1$ Einsetzen der Variablen → $0{,}05 \approx \sqrt[2]{\frac{100{,}00\ €}{90{,}70\ €}} - 1$

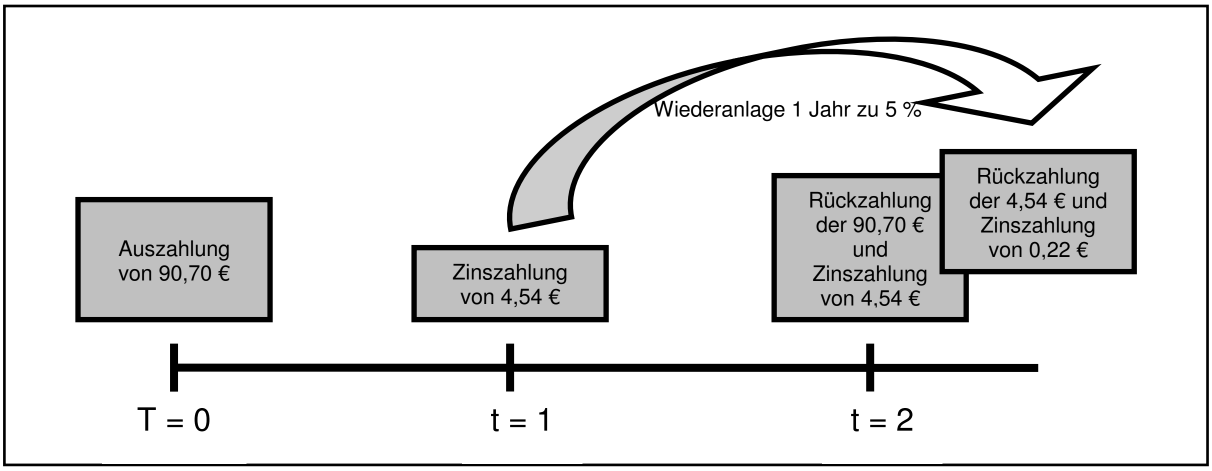


* Darstellung der Zahlungsströme (Cash-Flows) bei einem <u>diskontierten</u> Geldverleih.

[8] Abzug - englisch: discount.

2.3. Vergleich von Zins und Rendite

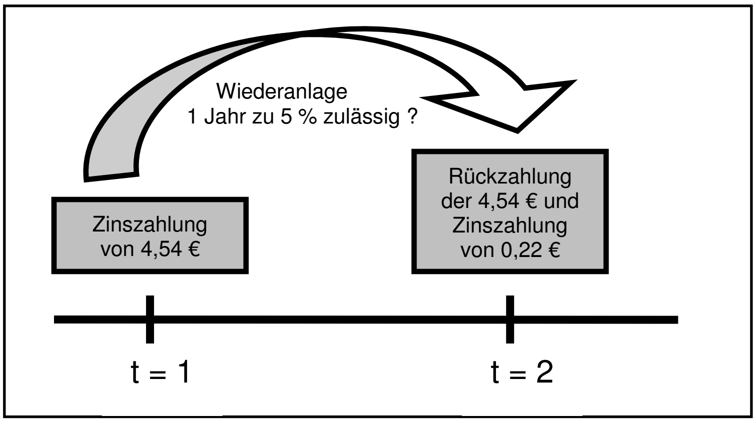
Mit den vorangegangenen Ausführungen ist bewiesen, dass beide Beispiele zum gleichen Ergebnis führen. Anschaulich kann man sich dies auch vorstellen, dass man sich heute die 90,70 € beim Diskont-Geldverleiher leiht und diese selbst als Zins-Geldverleiher zu 5 % wieder für zwei Jahre verleiht. Hierbei sind beide Geschäftsarten ohne Differenzen ineinander überführbar.



* Darstellung der verzinsten Anlage des diskontierten Auszahlungsbetrags.

Damit wäre bewiesen, dass Zins und Rendite identisch sind, wo doch zu Beginn davon gesprochen wurde grade den Unterschied herauszuarbeiten. Dieser Unterschied existiert in der Regel auch und trat nur bisher nicht auf, weil im vorangegangenen Beispiel zur verzinsten Variante Annahmen gemacht wurden, die in einem Spezialfall Zinsen und Renditen identisch werden lassen. Nur bei Geschäften, die genau eine Periode laufen und keine zusätzlichen Zinszahlungen innerhalb dieser Periode haben, sind Zins und Rendite immer identisch.

Untersuchen wir daher die Annahmen aus dem Beispiel genauer. Abgesehen von der Annahme, dass geliehene Beträge sofort wieder weiter verliehen werden können, wurde in $t_{(1)}$ unterstellt, dass der Zinssatz von 5 % weiterhin gilt und das auch obwohl hier das Geld nur noch ein Jahr verliehen wurde. Werden aber für eine Berechnung zum Zeitpunkt $t_{(0)}$ Marktpreise herangezogen, dürfen nur solche verwendet werden, die auch tatsächlich zu $t_{(0)}$ vorliegen und damit handelbar sind.



Dass eine Aussage über den zukünftigen, einjährigen Zins in $t_{(1)}$ zum Zeitpunkt $t_{(0)}$ unmöglich ist, bedarf keiner weiteren Erläuterung. Der einjährige Zins in $t_{(0)}$ ist jedoch bekannt. Mit dieser Information und einem im folgenden Exkurs erläuterten Hilfsmittel ist es möglich zum Zeitpunkt $t_{(0)}$ ein Geschäft mit einer Laufzeit von einem Jahr zu tätigen, das aber erst in $t_{(1)}$ beginnt. Dadurch kann dann der gesuchte Zins ausschließlich aus Informationen, die in $t_{(0)}$ vorliegen ermittelt werden. Hierbei handelt es sich um ein so genanntes Geldgeschäft auf Termin. Den Zinssatz hierfür nennt man auch Forward-Rate oder kurz nur Forward, wenn klar ist, dass es sich um einen Zinssatz handelt.

Exkurs - Geldgeschäft auf Termin

Für das folgende Beispiel wird die neue Annahme gemacht, dass für kürzere Laufzeiten in der Regel geringere Zinsen verlangt werden als für längere Laufzeiten und vice versa. Aber auch andere Marktkonstellationen sind möglich. Nur sind diese dann in der Erklärung etwas weniger anschaulich. Dies lässt sich vereinfachend dadurch erklären, dass der Geldverleiher sich längere Zeit an einen Zinssatz bindet und diesen auch bei Marktveränderungen nicht mehr während der Laufzeit ändern kann. Für die Renditeberechung aus der Diskont Variante ist dies nicht relevant, da zum Zeitpunkt $t_{(1)}$ keine Zahlung stattfindet. Damit ist bereits erkennbar, dass für die Renditeberechnung keine zusätzlichen Marktdaten herangezogen werden, einzig der diskontierte Auszahlungsbetrag in $t_{(0)}$ fließt als Marktpreis ein. Zum Zeitpunkt $t_{(0)}$ sollen beispielhaft die folgenden Marktdaten vorliegen:

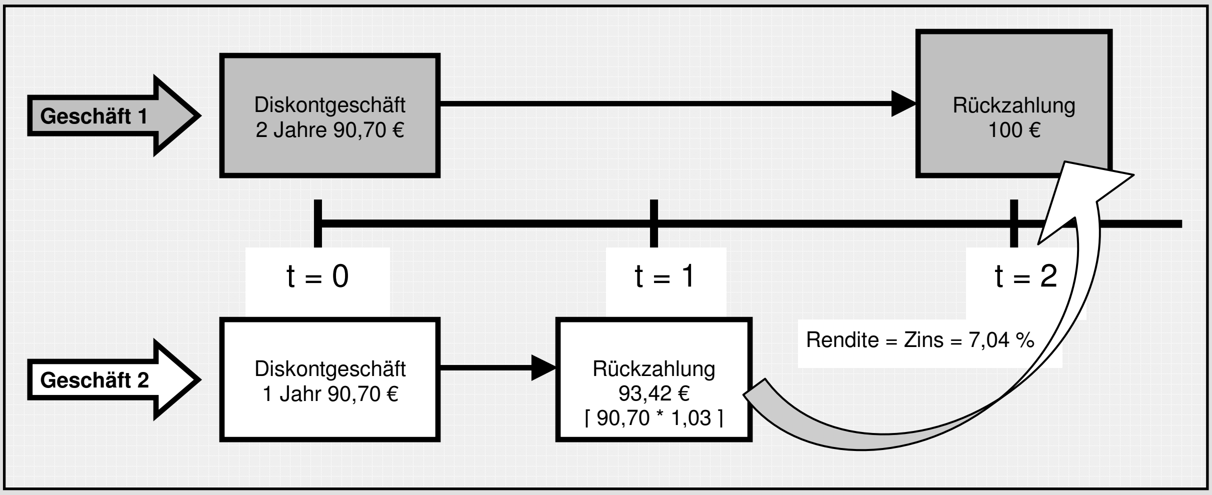
$i_1 = 3{,}00\%$ Zinssatz für eine Laufzeit von einem Jahr

$i_2 = 5{,}00\%$ Zinssatz für eine Laufzeit von zwei Jahren

$ZAF_2 = 90{,}70\%$ (Zerobond-)Abzsinsungsfaktor für eine Laufzeit von 2 Jahren

$r_{ZAF_2} = 5{,}00\%$ Zugehörige Rendite für den ZAF

$$r_{ZAF_2} = \sqrt[2]{1/ZAF_2} - 1$$



* Geldgeschäft auf Termin

Handelt es sich im Beispiel bei Geschäft 1 um eine Geldanlage und bei Geschäft 2 um eine Geldaufnahme, findet in $t_{(0)}$ keine Zahlung mehr statt. Erst in $t_{(1)}$ sind 93,42 € fällig (einzuzahlen), die dann in $t_{(2)}$ mit 100,00 € zurückgezahlt werden. Damit werden 93,42 € in einem Jahr für ein Jahr angelegt und rechnerisch mit 7,04 % verzinst. Solche Termingeschäfte bzw. Forward-Rates werden auch direkt am Geld und Kapitalmarkt gehandelt ohne die Geschäfte 1 & 2 einzeln abschließen zu müssen.

Dass sich der Zinssatz wirklich unmittelbar aus den Geschäftsdaten von 1 & 2 errechnet, ergibt sich aus der Abitragefreiheit des Marktes. Wäre der Forward-Zins nicht genau 7,04 %, könnte man durch den Abschluss der Geschäfte 1 & 2 und einem solchen Termingeschäft (Forward Anlage oder Aufnahme) einen risikolosen Mehrertrag erzielen, der einem sicher kein Marktteilnehmer freiwillig zugestehen wird.

2.4. Modellerweiterung für die verzinste Variante

Für das folgende Beispiel wird die neue Annahme gemacht, dass für kürzere Laufzeiten in der Regel[9] geringere Zinsen verlangt werden als für längere Laufzeiten und vice versa. Dies lässt sich vereinfachend dadurch erklären, dass der Geldverleiher sich längere Zeit an einen Zinssatz bindet und diesen auch bei Marktveränderungen nicht mehr während der Laufzeit ändern kann. Für die Renditeberechung aus der Diskont Variante ist dies nicht relevant, da zum Zeitpunkt $t_{(1)}$ keine Zahlung stattfindet. Damit ist bereits erkennbar, dass für die Renditeberechnung keine zusätzlichen Marktdaten herangezogen werden, einzig der diskontierte Auszahlungsbetrag in $t_{(0)}$ fließt als Marktpreis ein. Zum Zeitpunkt $t_{(0)}$ sollen beispielhaft die folgenden Marktdaten vorliegen:

Beispielhafte Marktdaten:

$i_1 = 3{,}00\%$	Zinssatz für eine Laufzeit von einem Jahr
$i_2 = 5{,}00\%$	Zinssatz für eine Laufzeit von zwei Jahren
$ZAF_2 = 90{,}70\%$	(Zerobond-)Abzsinsungsfaktor[10] für eine Laufzeit von 2 Jahren
$r_{ZAF_2} = 5{,}00\%$	Zugehörige Rendite für den ZAF

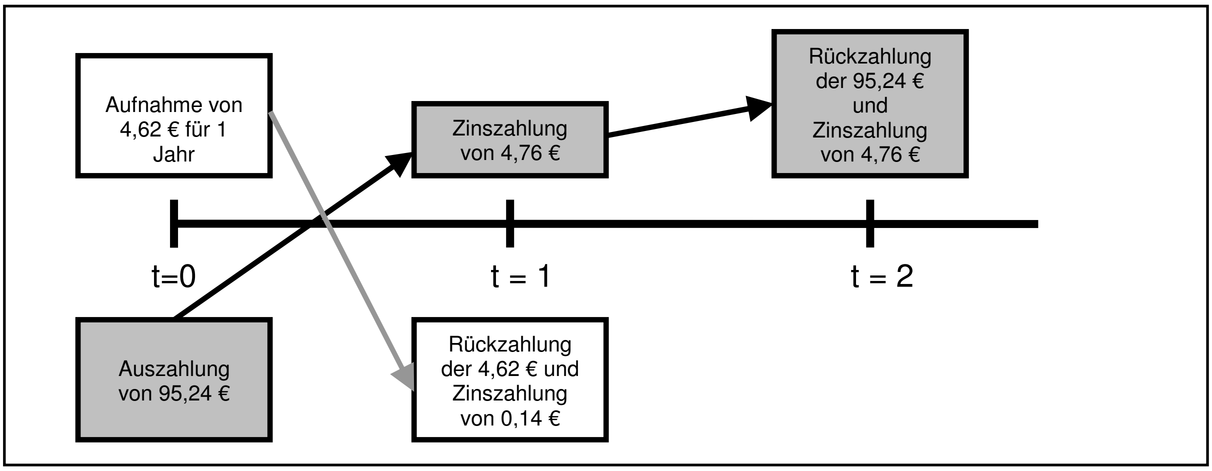
$$r_{ZAF_2} = \sqrt[2]{1/ZBAF_2} - 1$$

Zusätzlich wird nun zu besseren Übersicht eingeführt, dass Auszahlungen (Kreditgewährung und zu leistende Zinszahlungen) als Balken unterhalb der t-Achse und Einzahlungen (Rückzahlungen und zu erhaltende Zinszahlungen) oberhalb der t-Achse dargestellt werden.

[9] Dies ist bei einer normalen Zinsstruktur , die in zu den meisten Zeitpunkten der volkswirtschaftlichen Konjunkturzyklen vorliegt, der Fall. Selten treten auch so genannte inverse Zinsstrukturen auf.
[10] Die Bezeichnung ZAF oder auch ZBAF hat sich für den Abzinsungsfaktor aufgrund seines engen Bezugs zum Zerobond allgemein durchgesetzt.

2.4.1. Renditeberechnung mittels strukturkongruenter Refinanzierung

Es gilt nun die Rendite für die verzinste Variante zu berechnen. Dazu rechnet man zuerst die verzinste Variante in eine diskontierte Variante um. Hieraus lässt sich dann einfach die Rendite bestimmen.



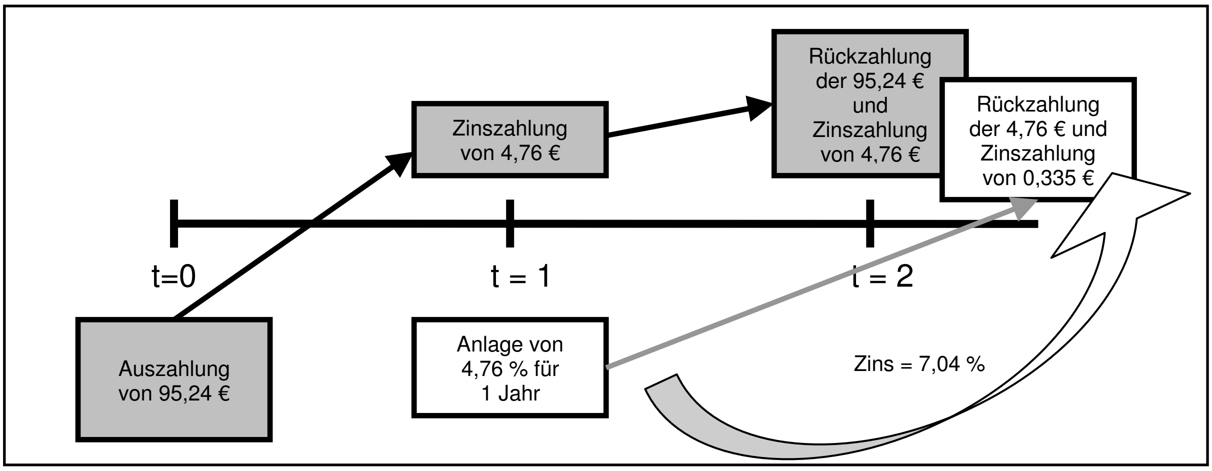
Um in zwei Jahren 100 € zu erhalten, müssen *100 € / 1,05 = 95,24 €* in $t_{(0)}$ verliehen werden. Da man bei der verzinsten Variante nach einem Jahr bereits *95,24 € * 0,05 = 4,76 €* an Zinsen erhält, kann man noch in $t_{(0)}$ selbst einen Geldbetrag für ein Jahr in Höhe von *4,76 € / 1,03 = 4,62 €* zu 3 % aufnehmen. Damit benötigt man per Saldo für die Auszahlung in $t_{(0)}$ nur 90,62 €. Die Rendite läge für dieses Geschäft bei 5,05 %. Das Geschäft hätte saldiert betrachtet nur noch eine Zahlung in $t_{(0)}$ und eine in $t_{(2)}$. In $t_{(1)}$ würde keine Zahlung mehr anfallen. Weiterhin hat man durch diese Konstruktion vermieden eine Annahme über den Jahreszins, der in einem Jahr vorliegt, machen zu müssen.

Mit dem vorangegangenen Beispiel wurde bereits eine einfache Variante der als **strukturkongruente Refinanzierung™** bezeichneten Methode durchgeführt, die an späterer Stelle noch genauer erläutert wird. Warum ist nun aber die Rendite in diesem Beispiel aus der verzinsten Variante höher als die der Diskont Variante? Der Grund hierfür ist in den für die Laufzeiten unterschiedlichen Zinssätzen zu finden.

So wurden für die verzinste Anlage der 95,24 € aus dem vorangegangenen Beispiel bereits für die erste Periode 5 % Zinsen gezahlt, obwohl derzeit für einjährige Geldanlagen nur 3 % gezahlt werden. Diese 5 % konnten daher wiederum durch einen Kredit vorfinanziert werden, der seinerseits aber nur mit 3 % verzinst wurde. Diese 2 % „Zinsersparnis“ sind quasi die Ursache für die um 0,05 % höhere Rendite gegenüber der Diskont Variante, die diese Möglichkeit der „Vorfinanzierung“ nicht bietet, da in $t_{(1)}$ keine Zahlung für deren Rückzahlung anfällt.

2.4.2. Renditeberechnung über Forward-Sätze

Eine andere Erklärung ist über den bereits erläuterten Forward-Satz möglich. So wird für den Ausgleich der 4,76 € in $t_{(1)}$ kein Geld in $t_{(0)}$ aufgenommen, sondern dieses Geld per Termin zum Forward-Satz von 7,04 % für ein Jahr angelegt. Dieses Geschäft wird jedoch schon in $t_{(0)}$ so vereinbart und abgeschlossen. Welche Zinssätze dann wirklich in $t_{(1)}$ vorliegen ist somit nicht mehr relevant.



Um die erste Zinszahlung nach einem Jahr zu „unterdrücken“, wird diese per Termin gleich wieder angelegt. Den Zins hierfür erhält man aus der Berechnung für Forward-Sätze aus 2.3.

In $t_{(2)}$ erhält man nun eine Rückzahlung von 105,095 € bei einer Auszahlung von 95,24 € in $t_{(0)}$. Durch ein Einsetzen in die Renditeformel aus 2.2. ergibt sich so ebenfalls eine Rendite von 5,05 %

Formel aus 2.2. → $0{,}0505 \approx \sqrt[2]{\frac{105{,}095\ €}{95{,}24\ €}} - 1$

Würde man 90,62 € in $t_{(0)}$ auszahlen erhält man statt der 105,095 € dann genau 100,00 €.

Dies zeigt auch, dass beide Varianten (2.4.1. & 2.4.2) zum gleichen Ergebnis führen.

Bei der verzinsten Variante hat somit der einjährige Zins auch einen Einfluss auf die Rendite bzw. den Kurs einer zweijährigen Geldanlage. Bei der Diskont-Variante ist dies nicht der Fall. Hier sind quasi nur die internen Daten (Laufzeit und Kurs) relevant. Daher auch die Bezeichnung „interne Verfallrendite“

3. Barwertrechnung mit einer Zinsstrukturkurve

Die Annahme einer flachen Zinsstruktur, wie sie unter Punkt 1 gemacht wurde, erweist sich in der Praxis als unzutreffend. Diesem Umstand wurde bereits in Ansätzen Rechnung getragen. Nun gilt es sich innerhalb einer Zinsstrukturkurve zu bewegen. In der Theorie gibt diese Kurve für alle erdenklichen Laufzeiten einen entsprechenden Zins an. In der Praxis haben sich jedoch Jahresintervalle[11] durchgesetzt. Gebrochene Laufzeiten können auf die unterschiedlichsten Methoden interpoliert werden, die an späterer Stelle noch erläutert werden.

3.1. Zinsstrukturkurven verschiedener Marktsegmente

Gleich vorab bleibt anzumerken, dass es „die Zinsstrukturkurve“ nicht gibt. Vielmehr hat jedes einzelne Marktsegment[12] seine eigene, individuelle Kurve. Weiterhin hat auch jede Währung ihre eigene Zinsstrukturkurve. So liegt es auf der Hand, dass ein Cash-Flow in Schweizer Franken nicht mit einer Euro-Zinsstrukturkurve abgezinst werden kann – Euro-Zinsen gibt es auch nur für Euro-Geldanlagen[13]!

Exkurs: im Internet verfügbare Quellen für Euro-Zinsstrukturkurven:

Euro-Pfandbriefkurve:

- http://www.hypverband.de/d/internet.nsf/tindex/de_vdh_pfandbriefk.htm

Euro-Swapkurve

- http://www.bondboard.de/frames/nav_1/midswaps.php

Euro-Staatsanleihen (Bund) – Achtung! Renditekurve, keine Zinskurve!

- http://www.bondboard.de/frames/nav_1/renditespiegel.php

Euro-Unternehmensanleihen:

- Je nach Bonität des Unternehmens wird hier eine der oben genannten Kurven z.B. die Swapkurve etwas nach oben verschoben.

[11] Im unterjährigen Bereich wird in der Regel noch mit Laufzeiten von 1,3,6, und 9 Monaten gearbeitet.
[12] Typisch sind die Unterscheidungen in Staatsanleihen, Pfandbriefe, Bankschuldverschreibungen, Zins-Swaps und Unternehmensanleihen.
[13] Auch wenn beispielsweise ein Quanto-Swap eine Ausnahme darstellt, dürfe klar sein, dass es sich hier nicht um eine konventionelle Geldanlage handelt.

Daher ist bei der Abzinsung eines Cash-Flows zunächst die Frage zu beantworten in welchem Marktsegment sich dieser bewegt. Bei einem Pfandbrief mag die Entscheidung für die Euro-Pfandbriefkurve noch recht einfach sein, aber bei der betriebswirtschaftlichen Bewertung einer Pensionsrückstellung ist diese Wahl, abgesehen von der Vorgabe aus dem Steuerrecht, nicht unbedingt einfach.

Im weiteren Verlauf wird nur noch von „der Zinskurve" gesprochen – gemeint ist hiermit immer die Euro-Swapkurve, die in der Regel auch mit der Euro-Pfandbriefkurve identisch ist, was vereinfachend auch angenommen wird.

3.2. Ermittlung der Zinsstrukturkurve

Die Zinsen selbst werden an den Wertpapier-Börsen[14] in der Regel nicht gehandelt. Dies leitet sich daraus ab, dass bei einem festverzinslichen Wertpapier, wie der Name schon sagt, der Zins nicht veränderbar ist. Eine Preisbildung kann daher nur über den Kurs erfolgen. Dennoch hat sich die Zinsstrukturkurve zu einem universellen Instrument entwickelt, welches die Lage am Rentenmarkt mit am besten beschreibt. Um die Zinsstrukturkurve aus den Kursen zu bestimmen, muss die Abzinsung quasi in umgekehrter Richtung erfolgen. Auch sind in den seltensten Fällen Kurse von festverzinslichen Wertpapieren verfügbar, die genau ein, zwei oder mehr Jahre laufen. Daher muss spätestens an dieser Stelle schon interpoliert werden. Mit der Zinsstrukturkurve erhält man dann eine genormte Information über den Markt. In der Praxis müssen hierzu viele Dinge berücksichtigt werden, die an dieser Stelle jedoch nicht weiter vertieft werden. So dürfen z.B. (unrealistische) Wertpapierkurse, die bei geringen Umsätzen zustande gekommen sind, nicht das gleiche Gewicht haben wie Millionenumsätze in sehr liquiden Titeln.

Ein Konkretes Beispiel für die beschriebene Vorgehensweise wird an dieser Stelle nicht genannt. Eventuell wird dies hier später noch ergänzt.

[14] Bei den OTC-Swaps zwischen Banken (und Unternehmen) kann durch die derivative Geschäftsart mittlerweile doch davon gesprochen werden, dass die Zinsen selbst gehandelt werden.

3.3. Die Strukturkongruente Refinanzierung (SKR)

Die Strukturkongruente Refinanzierung, im Folgenden kurz SKR, ist eine Methode um einen Zahlungsstrom mittels einer Zinsstrukturkurve abzuzinsen. Grundidee ist hierbei alle in der Zukunft anfallenden Zahlungen durch Gegengeschäfte zu schließen. Danach verbleibt in t_0 nur noch der abgezinste Barwert des Zahlungsstroms. Unter Punkt 2.4.1. wurde dies bereits in einem einfachen Beispiel angewendet.

Im nun folgenden Beispiel wird ein endfälliger Zahlungsstrom[15] von 100.000 € für 5 Jahre zu einem nachschüssigen Zinssatz von 4 % p.a. mittels der vorliegenden Zinsstrukturkurve abgezinst.

	t(0)	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)
Zahlungsstrom		4.000 €	4.000 €	4.000 €	4.000 €	104.000 €

Zinskurve	
1 Jahr / i(1)	4,00%
2 Jahre / i(2)	4,50%
3 Jahre / i(3)	5,00%
4 Jahre / i(4)	5,50%
5 Jahre / i(5)	6,00%

Bei der SKR beginnt man nun die zeitlich letzte Zahlung in t(5) mit einem Marktgeschäft auf Basis der Zinskurve zu schließen. Es gilt also einen Kredit (von 98.113 €) zu 6,0 % aufzunehmen, der zu einer Rückzahlungsverpflichtung von 104.000 € in t(5) führt. Damit fällt per Saldo in t(5) keine Zahlung mehr an. Die jedoch entstehenden Zinsverpflichtungen werden zu den Zeitpunkten t(1) bis t(4) als weiterer Zahlungsstrom erfasst.

	t(0)	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)
Zahlungsstrom		4.000 €	4.000 €	4.000 €	4.000 €	104.000 €
Geschäft zu 6,0 %	98.113 €	-5.887 €	-5.887 €	-5.887 €	-5.887 €	-104.000 €

Nun wird die gleiche Vorgehensweise in t(4) angewendet. Hier „fehlt“ derzeit eine Einzahlung von 1.887 € bzw. der Rückfluss einer Geldanlage von 1.788 € zusammen

[15] Auszahlungen mit negativem und Einzahlungen bzw. Rückflüsse mit positivem Vorzeichen.

mit ihren Zinsen von 5,5 %. In t(4) fällt nun ebenfalls per Saldo keine Zahlung mehr an.

	t(0)	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)
Zahlungsstrom		4.000 €	4.000 €	4.000 €	4.000 €	104.000 €
Geschäft zu 6,0 %	98.113 €	-5.887 €	-5.887 €	-5.887 €	-5.887 €	-104.000 €
Geschäft zu 5,5 %	-1.788 €	98 €	98 €	98 €	1.887 €	

Vervollständigt man nun die Vorgehensweise bis t(1), so fallen in t(1) bis t(5) keine Zahlungen mehr an. Was bleibt sind 91.424 € in t(0), was den Barwert bzw. die Abzinsung des Zahlungsstroms darstellt.

	t(0)	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)
Zahlungsstrom		4.000 €	4.000 €	4.000 €	4.000 €	104.000 €
Geschäft zu 6,0 %	98.113 €	-5.887 €	-5.887 €	-5.887 €	-5.887 €	-104.000 €
Geschäft zu 5,5 %	-1.788 €	98 €	98 €	98 €	1.887 €	
Geschäft zu 5,0 %	-1.703 €	85 €	85 €	1.788 €		
Geschäft zu 4,5 %	-1.630 €	73 €	1.703 €			
Geschäft zu 4,0 %	-1.567 €	1.630 €				
Summe	91.424 €	0 €	0 €	0 €	0 €	0 €

3.4. Zerobond Abzinsungsfaktoren (ZAF[16])

Sind nach der Methode der SKR aus 3.3 nun mehrere verschiedene Geschäfte abzuzinsen, wird dies recht aufwendig, zumal die die SKR in einer Tabellenkalkulation ohne Programmierkenntnisse relativ schwer automatisierbar ist. Dies Vorgehensweise kann deutlich vereinfacht werden, indem man für jede Laufzeit wie in 2.2. den Kurs eines entsprechenden Zerobonds bestimmt. Dieser weist nur noch eine Zahlung in t_0 und bei Fälligkeit auf. Dies kann mittels der SKR erfolgen. Jedoch sind die gewonnenen Kurse dann universell einsetzbar und die SKR muss nicht bei jedem Geschäft von neuem angewendet werden.

Mit dem Beispiel aus 3.3. stellt sich dies wie folgt dar. Zuerst ermittelt man die ZAFs für die Laufzeiten t_0 bis t_5. Hierzu wählt man bei Fälligkeit einen normierten Cash-Flow wie z.B. 1 € oder bei Prozentangaben 100 %, wie in diesem Beispiel.

[16] Oft auch ZBAF genannt.

	t(0)	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)
Zahlungsstrom		0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	100,000%
Geschäft zu 6,0 %	94,340%	-5,660%	-5,660%	-5,660%	-5,660%	-100,000%
Geschäft zu 5,5 %	-5,365%	0,295%	0,295%	0,295%	5,660%	
Geschäft zu 5,0 %	-5,110%	0,255%	0,255%	5,365%		
Geschäft zu 4,5 %	-4,890%	0,220%	5,110%			
Geschäft zu 4,0 %	-4,702%	4,890%				
Summe	74,273%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%

Das Ergebnis ist so zu interpretieren, dass eine Zahlung in t_5 heute 74,273 % ihrer Höhe in t_5 wert ist.

	t(0)	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)
Zahlungsstrom		0,000%	0,000%	0,000%	100,000%	0,000%
Geschäft zu 6,0 %	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
Geschäft zu 5,5 %	94,787%	-5,213%	-5,213%	-5,213%	-100,000%	
Geschäft zu 5,0 %	-4,965%	0,248%	0,248%	5,213%		
Geschäft zu 4,5 %	-4,751%	0,214%	4,965%			
Geschäft zu 4,0 %	-4,568%	4,751%				
Summe	80,502%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%

Bei einer Zahlung in t_4 sind es in t_0 80,502 %. Die Spalte t_5 und die Zeile mit dem Geschäft zu 6,0 % könnte man hier selbstverständlich auch entfernen. Die weitern ZAF stellen sich wie folgt dar. Über den Zusammenhang aus 2.2. ist es zudem möglich aus dem ZAF noch die zugehörige Rendite zu bestimmen.

Laufzeit	**Zins**	**ZAF**	**Rendite**
1 Jahr / i(1)	4,00%	96,154%	4,00%
2 Jahre / i(2)	4,50%	91,553%	4,51%
3 Jahre / i(3)	5,00%	86,300%	5,03%
4 Jahre / i(4)	5,50%	80,502%	5,57%
5 Jahre / i(5)	6,00%	74,273%	6,13%

Damit lässt sich nun der Zahlungsstrom aus 3.3. sehr einfach abzinsen.

	t(0)	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)
Zahlungsstrom	0 €	4.000 €	4.000 €	4.000 €	4.000 €	104.000 €
entsprechender ZAF	100,000%	96,154%	91,553%	86,300%	80,502%	74,273%
Barwert	0 €	3.846 €	3.662 €	3.452 €	3.220 €	77.244 €
Summe	91.424 €					

Der Vorteil dieser Methode zeigt sich ab dem zweiten Zahlungsstrom. Ist nun ein endfälliger Zahlungsstrom von 100.000 € über 4 Jahre zu einem nachschüssigen Zinssatz von 6 % p.a. mittels der vorliegenden Zinsstrukturkurve abzuzinsen, können die einmal ermittelten ZAF erneut verwendet werden.

	t(0)	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)
Zahlungsstrom	0 €	6.000 €	6.000 €	6.000 €	106.000 €
entsprechender ZAF	100,000%	96,154%	91,553%	86,300%	80,502%
Barwert	0 €	5.769 €	5.493 €	5.178 €	85.332 €
Summe	101.773 €				

3.5. Die Bootstrapping-Methode

In 3.4. muss jedoch für jeden ZAF eine komplette SKR durchgeführt werden. Bei t_{10} ist dies ein recht aufwendiges Procedere. Beim Bootstrapping versucht man sich die vorherigen Ergebnisse zu Nutze zu machen. Daher ermittelt man beim Bootstrapping die ZAF von der kurzen zu langen Laufzeit hin und nicht wie bei der SKR umgekehrt.

Zuerst ermittelt man den ZAF in t_1, kurz ZAF_1. Da in dieser idealisierten Welt zwischen t_0 und t_1 keine Zahlungen anfallen, lässt sich dieser direkt ermitteln. Die Eins im Zähler steht hier für eine Geldeinheit bzw. 100 % in Dezimalschreibweise.

$$ZAF_1 = \frac{1}{1+i_1} \qquad 96{,}154\% = \frac{1}{1+0{,}04}$$

Auch bei ZAF_2 ermittelt man nun, ähnlich wie bei der SKR, welches Geschäft die zeitlich letzte Zahlung kompensiert. Diese hat in t_0 den Wert:

$$Zwischenergebnis \quad in \quad t_0 = \frac{1}{1+i_2} \qquad 95{,}694\% = \frac{1}{1+0{,}045}$$

Dieser Betrag aus t_0 wird jedoch noch in t_1 mit i_2 verzinst und führt zu einer weiteren Zahlung von:

$$Zinszahlung \quad in \quad t_1 = \frac{1}{1+i_2} \cdot i_2 \qquad 4{,}306\% = \frac{1}{1+0{,}045} \cdot 0{,}045$$

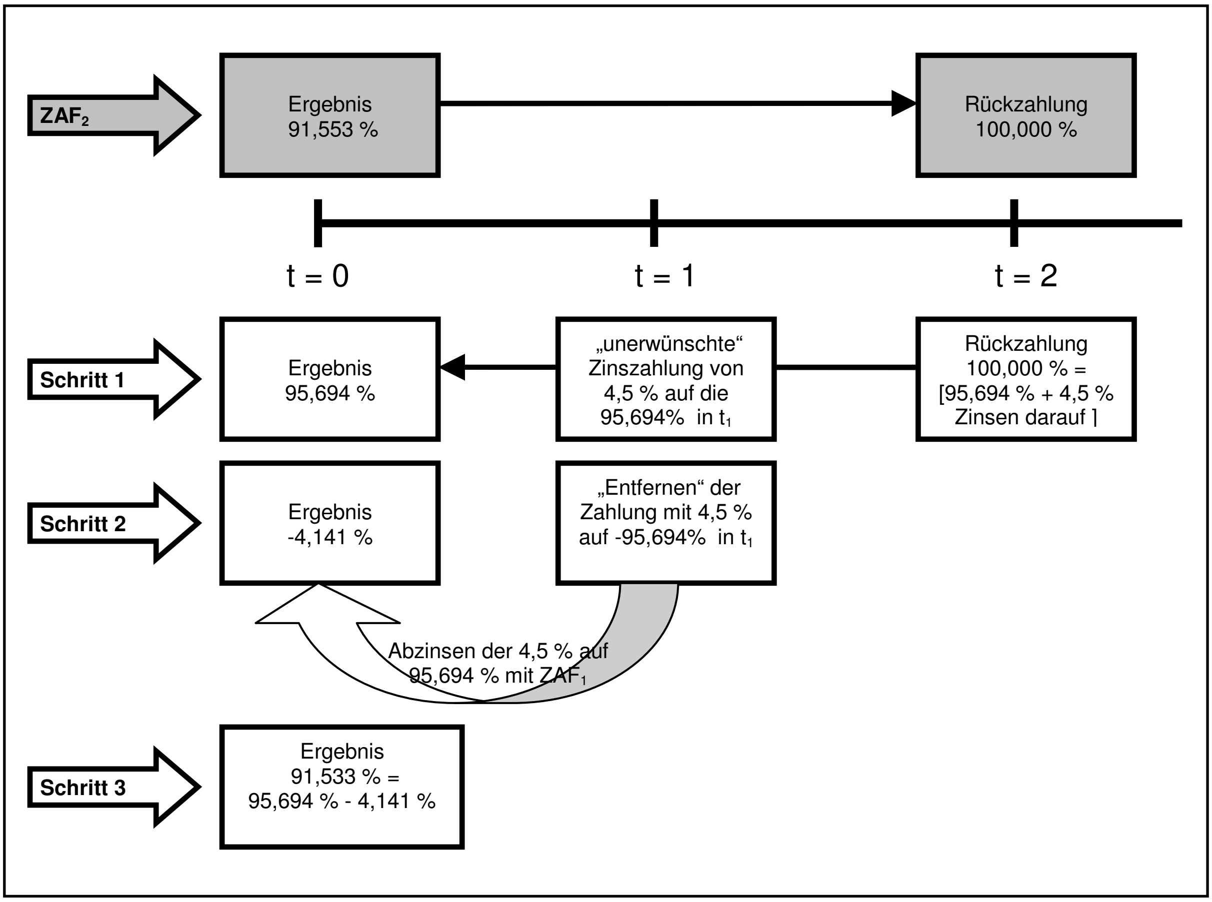
Diese Zahlung wird nun nicht mehr konventionell kompensiert, sondern man ermittelt einfach mit Hilfe von ZAF_1 deren Wert in t_0.

$$Barwert \quad Zinszahlung \quad aus \quad t_1 \quad in \quad t_0 = \frac{i_2 \cdot ZAF_1}{1+i_2} \qquad 4{,}141\% = \frac{0{,}045 \cdot 96{,}154\%}{1+0{,}045}$$

Da diese Zahlung in t_1 unerwünscht ist, zieht man deren Wert in t_0 einfach von dem bereits für t_0 erhaltenen Zwischenergebnis ab und erhält ZAF_2.

$$ZAF_2 = \frac{1}{1+i_2} - \frac{i_2 \cdot ZAF_1}{1+i_2} = \frac{1-i_2 \cdot ZAF_1}{1+i_2} \qquad 91{,}553\% = \frac{1-0{,}045 \cdot 96{,}154\%}{1+0{,}045}$$

Graphisch lässt sich dies wie folgt darstellen.



Wendet man diese Vorgehensweise nun für ZAF_3 an hat man in t_2 und t_1 jetzt zwei unerwünschte Zahlungen. Diese können wieder kompensiert werden, da jetzt neben ZAF_1 auch ZAF_2 bekannt ist.

$$ZAF_3 = \frac{1}{1+i_3} - \frac{i_3 \cdot ZAF_1}{1+i_3} - \frac{i_3 \cdot ZAF_2}{1+i_3} = \frac{1 - i_3 \cdot ZAF_1 - i_3 \cdot ZAF_2}{1+i_4}$$

An dieser Stelle wird vielleicht bereits klar, dass i im Zähler noch ausklammern kann. Hierdurch wird nicht nur die Schreibweise verkürzt, sondern auch der Trick hinter dem Bootstrapping deutlich.

$$ZAF_4 = \frac{1}{1+i_4} - \frac{i_4 \cdot ZAF_1}{1+i_4} - \frac{i_4 \cdot ZAF_2}{1+i_4} - - \frac{i_4 \cdot ZAF_3}{1+i_4} = \frac{1 - i_4 \cdot \left(ZAF_1 + ZAF_2 + ZAF_3\right)}{1+i_4}$$

In der Klammer werden quasi einfach nur alle vorangegangenen ZAFs summiert. Dies lässt sich allgemein auch wie folgt schreiben.

$$ZAF_t = \frac{1 - i_t \sum_{n=1}^{t-1} ZAF_n}{1+i_t}$$

Damit bietet das Bootstrapping eine einfache Methode um die ZAFs aus einer Zinsstrukturkurve zu ermitteln ohne die Doppelarbeiten wie bei der SKR ausführen zu müssen.

3.6. Einfluss von Geld- / Briefspannen auf den Barwert

Die Annahme, dass an Markt keine Geld- / Briefspannen existieren, ist zwar für einen pragmatischen Ansatz meist völlig ausreichend. Dennoch führen diese Spannen[17] zu Unterschieden in der Bewertung, die bei steigenden Volumina doch zu nennenswerten Beträgen anwachsen können. Weiterhin lässt sich damit zeigen, dass die Verwendung von ZAFs und von Bootstapping nur für eine idealisierte Form

[17] Auch am deutschen Markt meist Spread genannt.

der Bewertung genügt. Ist ein Zahlungsstrom tatsächlich mit Marktgeschäften in einen Barwert zu t_0 zu überführen, kann dies nur mit der SKR erfolgen, wie am folgenden Beispiel gezeigt wird. Dazu wird zuerst die bisherige Zinsstruktur mit Geld- / Briefspannen[18] erweitert.

Laufzeit	Zins (Geld)	Zins (Brief)
1 Jahr / i(1)	4,00%	4,25%
2 Jahre / i(2)	4,50%	4,75%
3 Jahre / i(3)	5,00%	5,20%
4 Jahre / i(4)	5,50%	5,70%
5 Jahre / i(5)	6,00%	6,15%

Als Zahlungsstrom wird wieder das Beispiel aus 3.3. herangezogen. Dieser soll durch seine positiven Zahlungen eine Geldanlage mit in der Zukunft liegenden Rückflüssen darstellen. Mit der SKR soll nun der tatsächlich am Markt erzielbare Barwert ermittelt werden.

	t(0)	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)
Zahlungsstrom		4.000 €	4.000 €	4.000 €	4.000 €	104.000 €

Zuerst ist nun wieder mit einem Kreditgeschäft die Zahlung in t_5 ausgeglichen werden. Dieses Kreditgeschäft muss nun zum Briefsatz von 6,15 % getätigt werden.

	t(0)	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)
Zahlungsstrom		4.000 €	4.000 €	4.000 €	4.000 €	104.000 €
Geschäft zu 6,15 %	97.975 €	-6.025 €	-6.025 €	-6.025 €	-6.025 €	-104.000 €

Bei den nun folgenden Geschäften handelt es sich dann ausnahmslos um Geldanlagen, die zum Geldsatz abgeschlossen werden. Der resultierende Barwert unterscheidet sich nun von dem aus 3.3.

[18] Zum Geldsatz kann angelegt werden und zum Briefsatz kann ein Kredit aufgenommen werden. Die Spannen sind jedoch am Interbankenmarkt deutlich geringer, zeigen dann jedoch nicht den Unterschied deutlich.

	t(0)	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)
Zahlungsstrom		4.000 €	4.000 €	4.000 €	4.000 €	104.000 €
Geschäft zu 6,15 %	97.975 €	-6.025 €	-6.025 €	-6.025 €	-6.025 €	-104.000 €
Geschäft zu 5,5 %	-1.920 €	106 €	106 €	106 €	2.025 €	
Geschäft zu 5,0 %	-1.828 €	91 €	91 €	1.920 €		
Geschäft zu 4,5 %	-1.750 €	79 €	1.828 €			
Geschäft zu 4,0 %	-1.682 €	1.750 €				
Summe	90.794 €	0 €	0 €	0 €	0 €	0 €

Auch wenn man Brief-ZAFs berechnen würde, um den Zahlungsstrom dann damit zu bewerten, wäre das Ergebnis wiederum ein anderes. Entscheidend ist im Beispiel, dass es nur bei der Anwendung der SKR möglich ist den Wechsel von Geld- zu Briefsatz zu erkennen. Dieser Wechsel kann auch mehrmals oder überhaupt nicht erfolgen. Erfolgt er überhaupt nicht, wäre wiederum eine Bewertung mit ZAFs möglich. Ob dies zutrifft ist mit einiger Erfahrung auch abschätzbar, was aber grade in den Grenzfällen nicht möglich ist.

Daher liefert wirklich exakte Ergebnisse, bei der Berücksichtung von Geld- / Briefspannen, nur die SKR. Wird diese Exaktheit jedoch nicht gefordert, mittelt man einfach die Geld- / Briefspannen und bewertet mittels ZAFs, die man mittels Bootstrapping ermittelt und erhält mit deutlich weniger Aufwand ähnliche Ergebnisse.

Man ist versucht zu denken, dass mit den heutigen Rechnerkapazitäten die SKR immer möglich wäre. In den Beispielen wurde allerdings immer mit ganzjährigen Zeitabständen gearbeitet, was die Handhabung deutlich vereinfacht. Außerdem steigt der Aufwand bei den mehreren tausend Zahlungsströmen einer Bank noch weiter an. Wird hiermit dann noch eine Value-at-Risk Simulation mit hunderten oder tausenden Szenarien durchgeführt, sind auch aktuelle Rechner schnell eine Weile beschäftigt.