Grundlagen Kreditrisikomodelle

(Fassung April 2006)

Markus Schieche

Email: Markus.Schieche@gmx.de
Homepage: www.markus-schieche.de

Vorwort

Dieser Artikel stellt eine Einführung in die Grundlagen von Kreditrisikomodellen dar. Er ist hauptsächlich eine Zusammenfassung meiner Erkenntnisse aus einer Beschäftigung mit diesem Thema. Daher sind die Ausführungen nicht für eine spezielle Zielgruppe verfasst und weisen zum Teil unterschiedliche Detaillierungsgrade auf. Einen wissenschaftlichen Anspruch erheben die Ausführungen nicht und verstehen sich mehr als Informationsquelle für Interessierte, zumal es sich bei beschriebenen Erkenntnissen ausschließlich um bereits bekannte Sachverhalte handelt.

Mathematische Formeln sind meist zusätzlich textlich oder durch Beispiele erläutert. Da hierzu im Text Microsoft Excel Tabellen eingebettet wurden, hängt der Artikel zusätzlich als Microsoft Word Originaldatei auf der letzten Seite an[1]. Weiterhin ist dort noch eine Komplettumsetzung der beiden Modellansätze in Microsoft Excel zu finden.

Die nachfolgenden Modelle und Beispiele gehen zur Vereinfachung von unabhängigen Kreditnehmern mit konstanten Ausfallraten und ohne Korrelationsbeziehungen[2] aus. Auch Sektoren als Risikotreiber werden hier nicht beachtet. Inputparameter der Modelle sind daher nur LGD[3] und PD. Rückmeldungen, Anmerkungen oder Korrekturen zu diesem Text nehme ich gerne entgegen.

[1] Der Zugriff auf die Dateianhänge benötigt Acrobat 7.0 oder höher.
[2] Dies wird eventuell in einer späteren Fassung noch behandelt.
[3] Gleichzusetzen mit Blankoanteil des Kredites, wenn zur Vereinfachung eine Rückflussquote von Null unterstellt wird. Je nach Steuerungssystem kann hier der nominelle oder der barwertige Blankoanteil zur Anwendung kommen. Wird im folgenden Text von Krediten gesprochen, sind damit immer Blankokredite gemeint.

Preface (Basic Credit Risk models)

This article is an introduction into basic knowledge about credit risk models. It is primary a summary of my own cognitions of an occupation with this subject. Therefore the realizations are not for a specific group of readers and show to some degree different details. The realizations do not do claim to be scientific. They are more information for interested readers, because the described realizations are only those that are commonly known about credit risk models.

Mathematical formulas are additionally explained by examples. Because of the embedded Microsoft Excel worksheets this article is appended[4] *as original Microsoft Word file on the last page. Furthermore a complete Microsoft Excel program with both models can be found there.*

The following models and examples imply independent obligors with fixed default rates and uncorrelated relations for simplification. No attention is paid on sector risks. Therefore the input parameters are only LGD (loss given default) and PD (probability of default). Any comments or corrections about this article are welcome.

[4] *For access Acrobat 7.0 or higher is required.*

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

EAD	Exposure at Default (Exposition / Blankoanteil bei Ausfall)
LGD	Loss Given Default (Verlusthöhe bei unterstelltem Ausfall) ($LGD = EAD \cdot Rückflussquote$) Im Folgenden Text wird immer von einer Rückflussquote von Null ausgegangen. Zu besseren Lesbarkeit wird statt LGD auch der Begriff Kredit-Exposure, Exposure oder Kredit verwendet.
PD	Probability of Default p.a. (Ausfallwahrscheinlichkeit / -raten)
EDF	Expected Default Frequency (identisch mit PD)
EL	Expected Loss (erwarteter Verlust)
UL	Unexpected Loss (unerwarteter Verlust)
VaR	Value at Risk (Wert am Risiko)
n	Anzahl der Kreditnehmer (Versuche) bzw. deren Indexierung
k	Anzahl der Kreditausfälle (Ereignisse) bzw. deren Indexierung
p	Eintrittswahrscheinlichkeit eines Ereignisses
$(1-p)$	Gegenwahrscheinlichkeit von p
μ	Mittlere Anzahl der Kreditausfälle (Ereignisse) einer Poissonverteilung
i	Allgemeine Indexvariable ohne spezifische Bedeutung
$P_\mu(k)$	Einzelwahrscheinlichkeit der Poissonsverteilung
P_1 $bzw.$ P_2	Beispielhafte Poissonverteilungen 1 bzw. 2
$P_{1\&2}$	Faltung von P_1 und P_2
$F_\mu(k)$	Verteilungsfunktion der Poissonsverteilung (Integral der Dichtefunktion)
B	Basiseinheit für ein Exposure-Band
v_n	Auf die Basiseinheit B normierter LGD des Kredites n
v_j	LGD in *j* Einzeiten von *B* $(v_j = j \cdot B)$
$\bar{v}_n$	Ganzzahlige Aufrundung von v_n
j	Index für die Exposure-Bänder in diesem hier Text gilt weiter $j = \bar{v}_n$
m	Anzahl der Exposure-Bänder im Modell ($m = j_{\max}$)
ε_n	Auf die Basiseinheit B normierte erwartete Verluste $LGD \cdot PD$
R	Wahrscheinlichkeitsverteilung aus der Panjer-Rekursion

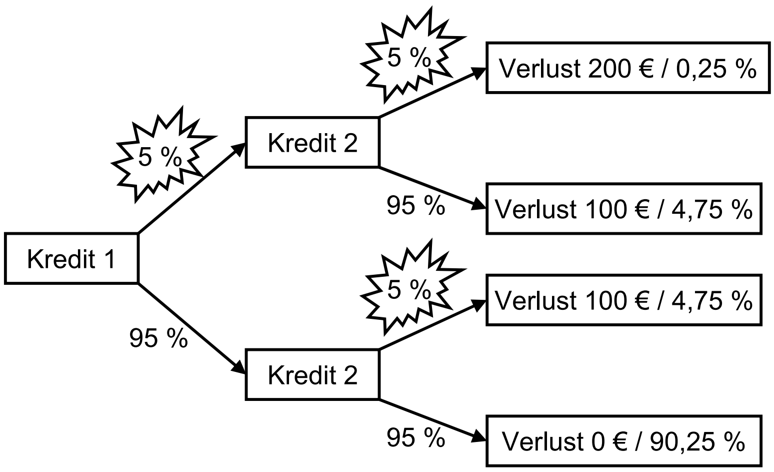
1. Entstehung von Kreditrisiken

Mit dem Kreditrisiko wird der Geldbetrag bezeichnet, der über den Expected-Loss (EL) hinaus ausfällt. Beispielsweise beträgt der EL eines Kredit-Exposures von 1.000 € mit einer Ausfallwahrscheinlichkeit (PD) von 5 % - 50 €. Bei der PD wird in allen folgenden Ausführungen immer von einer Ausfallwahrscheinlichkeit auf einen Zeithorizont von einem Jahr ausgegangen. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % tritt nun aber ein höherer Verlust als 50 € ein, nämlich 1.000 € bei Kreditausfall[5]. Nun ist in diesem Beispiel der Erwartungswert von 50 € nicht greifbar, da der Kredit bzw. sein LGD diesen Verlustwert nicht annehmen kann. Dies zeigt, dass Portfoliomodelle bei Anwendung auf einzelne oder wenige Kredite wenig Sinn machen, auch wenn es meist dennoch zu rechnerischen Ergebnissen kommt.

Betrachtet man nun den oberen Beispielkredit in hundertfacher Ausführung, ist der EL von 5.000 € nun greifbarer - 5 Kredite á 1.000 € fallen aus. Hier kann somit auf jeden Fall von einem Kreditportfolio gesprochen werden. Das Risiko in Form unerwarteter Verluste (UL) besteht nun darin, dass mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit mehr Kredite ausfallen als erwartet. Diese möglichen Ausfälle über den EL hinaus bezeichnet man Value at Risk (VaR). Um zur Vergleichbarkeit unterschiedlicher Portfolios den Risikogehalt bestimmen zu können, greift man auf die dimensionslose Zahl des Eigenkapital-Multiplikators zurück, der den Quotienten *VaR / EL* bezeichnet. Die Fälle bei denen durch weniger als 5 Ausfälle Chancen entstehen, werden nicht betrachtet.

Für ein erstes Beispiel, mit dem das Entstehen der Risiken veranschaulicht werden soll, wird die Anzahl der Kredite vorerst dennoch wieder auf 2 Kredite reduziert. Gegeben sind 2 Kredite á 1.000 € mit einer PD von 5 %.

[5] Der Kreditausfall ist hier ein diskretes Ereignis. Es existieren nur die Zustände „Ausfall“ und „kein Ausfall“. Teilausfälle sind zur Vereinfachung nicht vorgesehen.



* Verlauf von Ausfallereignissen in einer Baumstruktur

Wie man am oberen Schaubild erkennen kann, wird zu 90,25 % ein Verlust von 0 € nicht überschritten. Gleiches gilt für den Erwartungswert (EL) von 100 €, auch wenn dieser eigentlich nicht definiert ist. Selbst mit 3 oder 4 Krediten sind die Verlustwahrscheinlichkeiten noch „von Hand" ermittelbar. Da die Anzahl der Möglichkeiten jedoch exponentiell mit der Anzahl der Kredite steigt *($2^{Kreditanzahl}$)*, ist dies bei einem Portfolio von 100 Krediten nicht mehr mit vertretbarem Aufwand realisierbar.

2. Grundlagen von Verteilungsfunktionen

Verteilungsfunktionen im Bereich der Statistik stellen die Ergebnisse von Zufallsexperimenten in mathematischen Formeln dar. So müssen für die hier untersuchten Kreditausfälle nicht immer alle möglichen Fälle einzeln untersucht werden, sondern deren Wahrscheinlichkeiten können direkt berechnet werden. Was im vorigen Beispiel noch unproblematisch war, wird bei hohen Anzahlen von Krediten zunehmend schwerer zu überblicken. So ist das Beispiel mit 1.000 Krediten und der anzugebenden Wahrscheinlichkeit, dass genau 75 davon ausfallen deutlich aufwendiger in der Ermittlung. Um solche Fragestellungen einfacher beantworten zu können, greift man zu Verteilungsfunktionen wie nachfolgend dargestellten Beispiele zur Binomial- und Poissonverteilung.

2.1. Die Binomialverteilung

Die Berechnung lässt sich dennoch zum Teil mit Hilfe der Binomialverteilung realisieren, indem man die Kreditausfälle als Beroulli-Prozess ansieht. Bedingung sind hier aber gleich große Kredite und identische Ausfallwahrscheinlichkeiten, was für Kreditportfolios aber äußerst unüblich ist.

Die Wahrscheinlichkeitsdichten in der Binomialverteilung berechnen sich nach der Formel:

$B_{p,n}(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ und deren Verteilungsfunktion: $F_\mu(k) = e^{-\mu} \sum_{i=0}^{k} \frac{\mu^i}{i!}$

- *n* Anzahl der Versuche (Anzahl der Kreditnehmer)
- *k* Anzahl der Ereignisse (Kreditausfälle)
- *p* Eintrittswahrscheinlichkeit eines Ereignisses (Ausfallwahrscheinlichkeit)
- *(1 - p)* Gegenwahrscheinlichkeit von *p*

Der hierfür nötigte Binomialkoeffizient wird berechnet mit:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-(i-1)}{i}$$

Exkurs – Die Fakultät (n! gesprochen: „Fakultät n“)**:**

In der abzählenden Kombinatorik spielen Fakultäten eine wichtige Rolle, weil *n*! als die Zahl der Möglichkeiten interpretiert werden kann, *n* Gegenstände in einer Reihe anzuordnen.

$n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ oder auch in umgekehrter Reihenfolge $n! = \prod_{i=1}^{n} n-(i-1)$

Beispiel:

Die drei Würfel {1,2,3} kann man auf genau 3! = 6 verschiedene Weisen in einer Reihe anordnen. {123; 231; 312; 132; 213; 321}

Exkurs - Herleitung des Binomialkoeffizienten ($\binom{n}{k}$ gesprochen: „n über k“)**:**

Der Binomialkoeffizient gibt an wie viele Möglichkeiten es gibt *k* Elemente aus *n* Elementen auszuwählen *(k ≤ n)*, wenn deren Reihenfolge hierbei nicht relevant ist. Diesen Prozess nennt man auch Ziehung (z.B. von Murmeln oder Lottozahlen) ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge. Hierbei wird auch unterstellt, dass alle Ereignisse voneinander unabhängig sind.

Betrachten wir zunächst die Ziehung ohne zurücklegen von *k* Elementen aus *n* Elementen <u>mit Beachtung der Reihenfolge</u> und entwickeln hieraus dann die Formel für den Binomialkoeffizienten. Hierbei gibt es zuerst bei nur einer Ziehung genau *n* Möglichkeiten. Führt man eine zweite Ziehung durch, gibt es hier nur noch *(n – 1)* Möglichkeiten, da bereits ein Element aus der Grundgesamtheit mit zuvor n Elementen fehlt, weil es nicht zurückgelegt wurde. Für eine dritte Ziehung gäbe es noch *(n – 2)* Möglichkeiten und allgemein für die *k*-te Ziehung *(n – k + 1)* Möglichkeiten. Hieraus lässt sich die folgende geometrische Reihe bilden.

$$R_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots (n-k+1)$$

$$\begin{aligned} n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-k-1) \cdot (n-k) \cdot (n-k+1) \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \\ (n-k)! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-k-1) \cdot (n-k) \end{aligned}$$

Teilt man nun die erste durch die Zweite Reihe nehmen alle Quotienten bis einschließlich *(n - k)* den Wert 1 an. Es verbleibt der Teil der Reihe ab *(n - k + 1)*.

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-k)!} = \underbrace{\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-k-1)}{(n-k-1)} \cdot \frac{(n-k)}{(n-k)}}_{=1} \cdot (n-k+1) \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

$R_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$ Ziehung ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge.

Eine weitere Schreibweise ist auch: $\frac{n!}{(n-k)!} = \prod_{i=1}^{k} n - (i-1)$

Diese Schreibweise hat den Vorteil, dass bei großen n ohne eine Berechnung der Fakultät das Ergebnis rekursiv berechnet werden kann.

Nun muss nur zusätzlich noch berücksichtigt werden, dass die Reihenfolge der gezogenen Elemente nicht zu beachten ist. Hierbei setzt man einfach die Möglichkeiten der Varianten ohne zu denen mit Reihenfolge in Bezug zueinander. Für die Anordnung von *k* Elementen ohne Beachtung der Reihenfolge gibt es genau eine (1) Möglichkeit und mit Beachtung der Reihenfolge *k!* Möglichkeiten. Somit kann man durch den Faktor *1 / k!* Möglichkeiten mit Reihenfolge in Möglichkeiten ohne Reihenfolge umrechnen. Daher gilt nun für die Ziehung ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge – dem Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Die Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige (6 aus 49) im Lotto (bei einem abgegebenen Tipp) kann hiermit als $\frac{1}{13.983.816} = \frac{1}{\binom{49}{6}}$ *dargestellt werden.*

Exkurs - Herleitung der Binomialverteilung :

Der Binomialkoeffizient gibt bisher nur Aufschluss über die Anzahl der Möglichkeiten, um ein bestimmtes Ergebnis zu erreichen. Die Binomialverteilung ist eine diskrete Verteilung und ordnet nun noch eine konkrete Wahrscheinlichkeitsaussage hierfür zu. Bedingung hierfür ist, dass die Einzelwahrscheinlichkeit *p* für alle *n* Elemente der Grundgesamtheit identisch ist.

Anschaulich dargestellt sind die Elemente der Grundgesamtheit nun Münzen mit einer Kopf- / Zahl-Wahrscheinlichkeit = 50 % / 50 % => p = 0,5 (oder auch Würfel). Zuerst wird für alle Münzen der Grundgesamtheit ein Münzwurf durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit, dass hierbei genau *k* mal Zahl und (*n – k)* mal Kopf fällt ist:

$$P_n(k) = p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Hierbei wird berücksichtigt um welche Münzen es sich genau handelt. Bei der

Binomialverteilung ist aber nur nach der Wahrscheinlichkeit für eine Anzahl *k* gefragt – welche Münzen es nun genau sind, ist nicht relevant. Hier kommt nun der Binomialkoeffizient ins Spiel, der angibt wie viele Varianten der Münzen mit der Wahrscheinlichkeit $P_{(n,k)} = p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ möglich sind. Ist die Unterscheidung der Münzen also nicht relevant, multipliziert man einfach noch mit der Anzahl der Möglichkeiten, dem Binomialkoeffizienten, und erhält die Formel für die Binomialverteilung, die nun für das gewählte Beispiel die Wahrscheinlichkeit angibt aus *n* Münzen nach dem Münzwurf *k* Münzen zu erhalten, die „Zahl" aufweisen. Die Reihenfolge ist hierbei egal und die Münzen werden nicht zurückgelegt bzw. geworfen werden.

$$B_{p,n}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Statt der Münzen können auch Kredite verwendet werden. Diese haben dann i.d.R. keine 50 / 50 Wahrscheinlichkeit, sondern z.B. p = 0,05 für einen Ausfall und (1-p) = 0,95 für keinen Ausfall.

Berechnung der Binomialverteilung in Excel

n	k	p	q	Wahrschein-lichkeit	*Binomal-koeffizient*	*Wahrscheinlic hkeit*
100	0	5,0000%	95,0000%	0,5921%	*1*	*0,5921%*
100	2	5,0000%	95,0000%	8,1182%	*4950*	*8,1182%*
100	5	5,0000%	95,0000%	18,0018%	*75287520*	*18,0018%*
100	7	5,0000%	95,0000%	10,6026%	*16007560800*	*10,6026%*

* MS-Excel kann nur Fakultäten bis 170 darstellen. Für größere Werte von *n* muss daher die eigene Excel-Funktion für die Binomialverteilung verwendet werden, deren Berechnung über eine rekursive Berechnung auch ohne die Fakultäten auskommt.

Mit der Binomialverteilung ist man schnell am Ende der Möglichkeiten angelangt, da alle Kreditnehmer gleich groß sein und identische Ausfallraten besitzen müssen. Jedoch ist man hiermit einer analytischen Lösung schon etwas näher gekommen.

2.2. Die Poissonverteilung[6]

Die Einschränkung der Binomialverteilung hinsichtlich identischer Ausfallraten, lässt sich unter gewissen Annahmen mit der Poissonverteilung umgehen. Die Poissonverteilung ist eine diskrete Verteilung für die Wahrscheinlichkeit von *k* Ereignissen bei einer mittleren Ereignisrate von *μ*, die zugleich Erwartungswert und Varianz darstellt.

Die Formel für die Dichtefunktion lautet: $P_{\mu}(k) = \frac{\mu^{k}}{k!} e^{-\mu}$

und deren Verteilungsfunktion: $F_{\mu}(k) = e^{-\mu} \sum_{i=0}^{k} \frac{\mu^{i}}{i!}$

Exkurs - Herleitung der Poissonverteilung:

Die Poissonverteilung lässt sich aus der Binomialverteilung als Grenzverteilung für $n \to \infty$ und $p = \mu / n \to 0$ herleiten. Wie bei der Binomialverteilung geht die Poissonverteilung von unabhängigen Ereignissen aus. *μ* bezeichnet hier die mittlere Ereignisanzahl – somit ist *μ / n* deren Wahrscheinlichkeit.

Hierbei vertauscht man zuerst die beiden Nenner bzw. Nennerteile n^k und *k!* in den Gruppen 1 und 2. Dadurch können für die Gruppen 1-4 folgende Konvergenzen gefolgert werden.

$$\lim_{n \to \infty} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot p^{k} \cdot (1-p)^{n-k} = \lim_{n \to \infty} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot \left(\frac{\mu}{n}\right)^{k} \cdot \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-k}$$

[6] Benannt nach Siméon Denis Poisson (1781-1840)

$$\lim_{n \to \infty} = \underbrace{\overbrace{\frac{n!}{(n-k)!\cdot n^k}}^{Gruppe\,1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\overbrace{\left(\frac{\mu^k}{k!}\right)}^{Gruppe\,2}}_{\to \left(\frac{\mu^k}{k!}\right)} \cdot \underbrace{\overbrace{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n}^{Gruppe\,3}}_{\to e^{-\mu}} \cdot \underbrace{\overbrace{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-k}}^{Gruppe\,4}}_{\to 1} = \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu}$$

<u>Gruppe 1:</u>

Die Gruppe konvergiert gegen 1, da bei großem n der Bruch von n! und (n-k)! dominiert wird, weil die Fakultät die am Schnellsten wachsende Funktion ist. Weiterhin gilt bei n → ∞ der Zusammenhang n! ~ (n-k)!, da der Wert für k dann kaum noch ins Gewicht fällt.

<u>Gruppe 2:</u>

Die Gruppe weist keine Konvergenz auf und stellt einen der Formelbestandteile der Poissonverteilung dar.

<u>Gruppe 3:</u>

Die dritte Gruppe konvergiert gegen $e^{-\mu}$, da n → ∞ geht. Es handelt sich hier auch um die gleiche Funktion wie für die stetige Verzinsung mit n, also unendlich, vielen Kapitalisierungszeitpunkten. Einziger Unterschied ist, dass das Kapital durch die Verwendung von –μ quasi abnimmt (Abzinsung) und nicht wie im Regelfall mit μ anwächst (Aufzinsung).

$$e^{\mu} = \left(1+\frac{\mu}{n}\right)^n \Rightarrow e^{-\mu} = \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n$$

<u>Gruppe 4:</u>

Hier liegt eine Konvergenz gegen 1 vor, da eine der Annahmen μ / n → 0 war und der Wert für k gegenüber n „relativ“ klein ist.

<u>Die Formel für die Poissonverteilung ist somit:</u> $P_{\mu}(k) = \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu}$

(Oft wird statt der Bezeichnung *μ* auch *λ* angegeben, um Verwechslungen zu vermeiden, da *μ* meist auch als Erwartungswert für die Normalverteilung verwendet wird.)

Weiterhin gilt (als Normierungsbedingung) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu} = e^{-\mu} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} = 1$

Damit gilt auch: $\lim_{k \to \infty} = \frac{\mu^k}{k!} = e^{\mu}$ und $P_{\mu}(0) = e^{-\mu}$

Die Kenntnis Wahrscheinlichkeit für *k = 0* ist besonders wichtig, da bei einer späteren, rekursiven Berechnung der Term für *k = 0* nicht definiert ist.

Bestimmung des Mittelwerts der Poissonverteilung:

Bei der Bestimmung des Mittelwertes, wird jeder Wert der X-Achse (zur weiteren Verwendung der Variable *k* auch K-Achse genannt) mit seiner Wahrscheinlichkeitsdichte aus der Poissonverteilung gewichtet. Die Formel für eine einzelne Zähldichte ist:

$$k \cdot P_{\mu}(x) = k \cdot \frac{\mu^{k}}{k!} \cdot e^{-\mu}$$

Zur Mittelwertbestimmung ($\bar{k}$) sind alle Zähldichten der Poissonverteilung zu berücksichtigen. Daher sind alle Glieder in der Summenfunktion noch mit k zu multiplizieren.

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P_{\mu}(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\mu^{k}}{k!} \cdot e^{-\mu} = e^{-\mu} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\mu^{k}}{k!} =$$

Um die Konvergenz der oberen Formel zu bestimmen bedient man sich eines Umwegs über eine Art der Ableitung der Poissonverteilung. Hierzu nimmt man die Ableitung unter Anwendung der Potenzregel für jedes einzelne *μ*-Glied der Summe vor.

Die Potenzregel besagt für das Ableiten: $(a^{n})' = n \cdot a^{n-1}$

Somit gleicht man zunächst den Term in der Summenfunktion dem Ergebnis der Ableitung nach der Potenzregel an. Hierzu klammert man *μ* einfach aus der Summe aus und erhält:

$$\bar{k} = \mu \cdot e^{-\mu} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\mu^{k-1}}{k!} = \mu \cdot e^{-\mu} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{1}{k!} \cdot \mu^{k-1}$$

Nun substituiert man $k \cdot \frac{1}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}$ und erhält:

$\bar{k} = \mu \cdot e^{-\mu} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!}$ und es gilt weiterhin $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^{k}}{k!} = e^{\mu}$

Die Konvergenz der Summe somit nun klar erkennbar.

$$\bar{k} = e^{-\mu} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\mu^{k}}{k!} = \mu \cdot e^{-\mu} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\mu^{k-1}}{k!} = \mu \cdot e^{-\mu} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} = \mu \cdot e^{-\mu} \cdot e^{\mu} = \mu$$

<u>Damit ist bewiesen, dass der Erwartungswert einer Poissonverteilung immer deren Parameter *μ* ist.</u>

Bestimmung von Varianz bzw. Standardabweichung der Poissonverteilung:

Da mit *μ* der Mittelwert bereits feststeht, gilt für die Varianz folgende Formel.

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (k-\mu)^2 \cdot \frac{\mu^{k}}{k!} \cdot e^{-\mu} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(k^2 - 2k\mu + \mu\right)^2 \cdot \frac{\mu^{k}}{k!} \cdot e^{-\mu}$$ (ausmultiplizieren von *(k - μ)*²)

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\mu^{k}}{k!} \cdot e^{-\mu} \underbrace{- \sum_{k=0}^{\infty} 2k\mu \cdot \frac{\mu^{k}}{k!} \cdot e^{-\mu}}_{\to -2\mu^2} \underbrace{+ \sum_{k=0}^{\infty} \mu^2 \cdot \frac{\mu^{k}}{k!} \cdot e^{-\mu}}_{\to +\mu^2}$$

Zwischenschritt 1: $-\sum_{k=0}^{\infty} 2k\mu \cdot \frac{\mu^{k}}{k!} \cdot e^{-\mu} \overbrace{= -\sum_{k=0}^{\infty} 2k\mu^2 \cdot \frac{\mu^{k-1}}{k!} \cdot e^{-\mu}}^{ausklammern\ von\ \mu} \overbrace{= -\sum_{k=0}^{\infty} 2\mu^2 \cdot \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\mu}}^{\frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}}$

Zwischenschritt 2: $-\sum_{k=0}^{\infty} 2\mu^2 \cdot \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\mu} = -2\mu^2 \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\mu}}_{\to 1}$

$$\sigma^2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\mu^{k}}{k!} \cdot e^{-\mu} \right) - 2\mu^2 + \mu^2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\mu^{k}}{k!} \cdot e^{-\mu} \right) - \mu^2$$

An dieser Stelle folgende Substitution gemacht: $k^2 = k \cdot k = \left(k \cdot (k-1) + k\right)$

$$\sigma^2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(k \cdot (k-1) + k\right) \cdot \frac{\mu^{k}}{k!} \cdot e^{-\mu} \right) - \mu^2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot \frac{\mu^{k}}{k!} \cdot e^{-\mu} \right) + \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\mu^{k}}{k!} \cdot e^{-\mu} \right)}_{\to \mu} - \mu^2$$

Die Konvergenzeigenschaft gegen μ wurde bereits mehrfach genutzt. Aus dem Term davor, kann ebenfalls wieder ein solcher konvergierender Term gebildet werden.

Zwischenschritt 1: $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu} = e^{-\mu} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot \frac{\mu^k}{k!}}_{ausklammern\ von\ \mu^2}$

Zwischenschritt 2: $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu} = e^{-\mu} \cdot \mu^2 \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot \frac{\mu^{k-2}}{k!}}_{\frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} \Rightarrow \frac{k \cdot (k-1)}{k!} = \frac{1}{(k-2)!}}$

Zwischenschritt 3: $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu} = e^{-\mu} \cdot \mu^2 \cdot \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu^{k-2}}{(k-2)!}}_{\rightarrow e^{\mu}}$ (beachte: nun gilt k = 2)

Draus folgt: $\sigma^2 = \underbrace{\underbrace{e^{-\mu} \cdot e^{\mu}}_{=1} \cdot \mu^2 - \mu^2}_{=0} + \mu$ und $\sigma^2 = \mu$

<u>Der Parameter μ ist damit neben Erwartungswert auch gleichzeitig die Varianz der Poissonverteilung $P_\mu(k)$.</u>

Besondere Eigenschaften der Poissonverteilung

Für die beiden beispielhaften Poissonverteilungen mit einem μ von μ_1 und μ_2 wird dieses zum Teil auch ohne Tieferstellung mit μ1 und μ2 bezeichnet, um noch eine akzeptable Darstellungsqualität zu gewährleisten.

Die Berechnung der Poissonverteilung kann durch eine rekursive Berechnung ersetzt werden. Damit kann man die Berechnung der Fakultäten für hohe Werte von k umgehen. Hierzu substituiert man $k!$ durch:

$k! = \prod_{i=1}^{k} k - (i-1)$ und damit gilt:

$$P_{\mu}(k) = \frac{\mu^{k}}{k!} \cdot e^{-\mu} = \prod_{i=1}^{k} \frac{\mu}{k-(i-1)} \cdot e^{-\mu} = e^{-\mu} \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{\mu}{k-(i-1)}$$

Auch eine Schreibweise in Summen ist unter Zuhilfenahme des natürlichen Logarithmus möglich, wenn hier auch nicht weiter relevant.

$$P_{\mu}(k) = \frac{\mu^{k}}{k!} \cdot e^{-\mu} = EXP\left(-\mu + \sum_{i=1}^{k} \ln\left(\frac{\mu}{k-(i-1)}\right)\right)$$

Neben ihrer Einparametrigkeit, in der *μ* gleichzeitig Erwartungswert und Varianz ist, hat sie noch eine weitere interessante Eigenschaft. Die Poissonverteilung ist reproduktiv, was bedeutet, dass die Faltung von unabhängigen Poisson-Zufallsvariablen wieder poissonverteilt ist. Somit ist die mathematische Faltung, die unter Punkt 4.1. auch einmal manuell durchgeführt wird, (Rechenzeichen „*“) zweier Poissonverteilungen wieder eine Poissonverteilung. Die mathematische Faltung zweier Funktionen ist auch definiert als das Integral über dem Produkt der Funktionen $P_{\mu 1}(i)$ und $P_{\mu 2}(i)$. Dabei ist eine der beiden Funktionen gespiegelt – daher „- *i*“ und noch um den Wert *k,* zu dem die Wahrscheinlichkeit nach Faltung gesucht ist, verschoben. Es gilt damit:

$$(P_{\mu 1} * P_{\mu 2})(k) = \sum_{i=0}^{k} P_{\mu 1}(i) \cdot P_{\mu 2}(-i+k) = \sum_{i=0}^{k} P_{\mu 1}(i) \cdot P_{\mu 2}(k-i)$$

$$(P_{\mu 1} * P_{\mu 2})(k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\mu_1^{\,i}}{i!} \cdot e^{-\mu 1} \cdot \frac{\mu_2^{\,k-i}}{(k-i)!} \cdot e^{-\mu 2}$$

$$(P_{\mu 1} * P_{\mu 2})(k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\mu_1^{\,i}}{i!} \cdot \frac{\mu_2^{\,k-i}}{(k-i)!} \cdot e^{-\mu 1} \cdot e^{-\mu 2} = e^{-(\mu 1 + \mu 2)} \cdot \sum_{i=0}^{k} \frac{\mu_1^{\,i}}{i!} \cdot \frac{\mu_2^{\,k-i}}{(k-i)!}$$

Nun ergänzt man mit *k! / k!* und klammert *1 / k!* wieder aus der Summe aus. Dadurch kann ein Teil des Terms als Binomialkoeffizient *k* über *i* ausgerückt werden.

$$(P_{\mu 1} * P_{\mu 2})(k) = e^{-(\mu 1 + \mu 2)} \cdot \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k! \cdot \mu_1^{\,i} \cdot \mu_2^{\,k-i}}{i! \cdot (k-i)!}$$

$$\left(P_{\mu 1} * P_{\mu 2}\right)(k) = e^{-(\mu 1+\mu 2)} \cdot \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \underbrace{\binom{k}{i} \cdot \mu_1^{\,i} \cdot \mu_2^{\,k-i}}_{\text{ähnlich einer Binomialverteilung}}$$

Auffällig ist bei der letzten Umformung, dass der Term innerhalb der Summe der Binomialverteilung ähnelt. Für den Spezialfall $\mu_1 + \mu_2 = 1$ wäre es bereits eine Binomialverteilung Die Summe würde dann immer eine Wahrscheinlichkeit von 1 ergeben. Diese Normierung auf eine Wahrscheinlichkeit von 1 entsteht aber auch im allgemeinen Fall durch ein Ergänzen und späteres Ausklammern von $(\mu_1 + \mu_2)$ und man erhält:

$$\left(P_{\mu 1} * P_{\mu 2}\right)(k) = e^{-(\mu 1+\mu 2)} \cdot \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \frac{\mu_1^{\,i} \cdot (\mu_1 + \mu_2)^i}{(\mu_1 + \mu_2)^i} \cdot \frac{\mu_2^{\,k-i} \cdot (\mu_1 + \mu_2)^{k-i}}{(\mu_1 + \mu_2)^{k-i}}$$

$$\left(P_{\mu 1} * P_{\mu 2}\right)(k) = e^{-(\mu 1+\mu 2)} \cdot \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \underbrace{(\mu_1 + \mu_2)^i \cdot (\mu_1 + \mu_2)^{k-i}}_{=(\mu_1+\mu_2)^k} \cdot \binom{k}{i} \cdot \frac{\mu_1^{\,i}}{(\mu_1 + \mu_2)^i} \cdot \frac{\mu_2^{\,k-i}}{(\mu_1 + \mu_2)^{k-i}}$$

Der Term $(\mu_1 + \mu_2)^k$ lässt sich weiterhin noch aus der Summe ausklammern und man erhält:

$$\left(P_{\mu 1} * P_{\mu 2}\right)(k) = e^{-(\mu 1+\mu 2)} \cdot \frac{(\mu_1 + \mu_2)^k}{k!} \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \left(\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\right)^i \cdot \left(\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\right)^{k-i}}_{=1}$$

Jetzt steht in der Summenbeziehung nur noch eine „synthetische Binomialverteilung“, deren Summe bzw. Integral immer den Wert 1 annimmt. Damit ist bewiesen,

$$\left(P_{\mu 1} * P_{\mu 2}\right)(k) = e^{-(\mu 1+\mu 2)} \cdot \frac{(\mu_1 + \mu_2)^k}{k!} = P_{(\mu 1+\mu 2)}(k)$$

dass eine Faltung zweier Poissonverteilungen wieder zu einer Poissonverteilung führt. Die Parameter der beiden Verteilungen μ_i addieren sich hierbei. Da diese neue Verteilung wiederum mit einer dritten Poissonverteilung gefaltet werden kann, lässt sich daraus schließen, dass auch eine Faltung beliebig vieler

Poissonverteilungen wieder zu einer Poissonverteilung führt, deren Parameter *μ* wieder der Summe aller μ_i der gefalteten Verteilungen entspricht.

$$\left(P_{\mu 1} * P_{\mu 2} * \ldots * P_{\mu n}\right)(k) = P_{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}(k)$$

Aus der soeben gemachten Erkenntnis ist zudem ableitbar, dass nicht alle Zufallsereignisse einer Poissonverteilung, die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen müssen. Vielmehr ist mit dem Parameter *μ* nur der gemeinsame Erwartungswert aller Ereignisse anzugeben.

Die Poissonverteilung eignet sich insbesondere für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei seltenen Ereignissen. Ein weiterer Vorteil ist, dass mit *μ* nur die mittlere Ereignisrate anzugeben ist, die gleichzeitig auch die Varianz ist. Somit können mit der Poissonverteilung auch Risiken aus Krediten mit unterschiedlichen Ausfallraten[7] berechnet werden. Da nun aber mit einer Näherung gearbeitet wird, sollte man die folgenden beiden Einschränkungen[8] beachten.

- Da gilt $n \rightarrow \infty$, geht man davon aus, dass das Portfolio aus unendlich vielen Krediten besteht. Da dies niemals der Fall sein wird, muss das Portfolio zumindest aus ausreichend[9] vielen Krediten bestehen.

- Die Annahme von $\mu / n \rightarrow 0$ ist durch $n \rightarrow \infty$ nicht automatisch erfüllt. Die Annahme bedeutet vielmehr, dass erwarteter Verlust bzw. Ausfallraten nicht beliebig hoch sein dürfen. Bezogen auf die Ausfallraten sollten diese nicht Werte über 25 % annehmen. Für Bewertung von Junk-Portfolios[10] mit mittleren Ausfallraten von deutlich über 25 % ist ein Kreditrisikomodell basierend auf der Poissonverteilung somit ungeeignet. Diese Einschränkung

[7] Da die Exposures weiterhin gleich hoch sein müssen, ist *μ* hier das ungewichtete, arithmetische Mittel der Ausfallraten
[8] Vgl. CFSB CreditRisk+ (1997) S.35ff.
[9] Als ausreichend können beispielsweise 40 Kredite bei einer PD von 5 % angesehen werden. Vgl. BVR-Fachkonzept Kreditportfoliomodell (2000) S. 72 f.
[10] Als Junk-Portfoilos bezeichnet man Kreditportfolios mit Kreditnehmern äußerst schlechter Bonität. Meist werden solche Portfolios an spezielle Abwickler verlauft.

ist auch in der Regel die wichtigere der beiden. Ein einzelner Kredit mit geringer Ausfallrate von maximal $\approx 5\ \%$ wird durch die Poissonverteilung noch recht gut approximiert. Im Gegensatz dazu liegt der Approximationsfehler bei 20 Krediten mit einer Ausfallrate ab $\approx 25\ \%$ demgegenüber höher.

Werden die eben genannten Einschränkungen nicht ausreichend beachtet, zeigt sich dies durch unplausible bzw. fehlerhafte Ergebnisse. Die Poissonverteilung wird für den Ausfall von mehr als n-Krediten von Null verschiedene Wahrscheinlichkeiten annehmen. Hierdurch kann der Verlust eines bestimmten Quantils höher sein als das Exposure des Gesamtportfolios. Da die Annahme von unendlich vielen Krediten niemals erfüllt wird, wird die Verteilungsfunktion F langsamer gegen 1 konvergieren als bei unendlich vielen Krediten. Hierdurch wird das Risiko eines gegebenen Quantils tendenziell überschätzt.

Unter Beachtung der genannten Einschränkungen ist es mittels der Poissonverteilung nun möglich Risiken aus einem Portfolio mit Krediten unterschiedlicher Ausfallraten zu berechnen. Die Einschränkung der identischen Kreditexposures (gleich große Kredite) gilt hier weiterhin, sodass zu einem ersten analytischen Grundmodell noch weitere Schritte notwendig sind. Diese werden an späterer Stelle beschrieben.

3. Beispiel für ein Simulationsmodell (Monte-Carlo-Simulation)

Die Monte-Carlo-Simulation verfolgt nun einen völlig anderen Ansatz als die soeben vorgestellten Versuche eines analytischen Ansatzes. Um zu erklären was eine Monte-Carlo-Simulation genau ist, eignet sich das folgende Beispiel nahezu ideal. Somit wird auf eine weitere Einleitung verzichtet.

Wie bereits im Rahmen von Binomialverteilung und Poissonverteilung erläutert beträgt die Anzahl der Verlustfälle in einem Portfolio mit n-Kreditnehmern 2^n. Da eine vollständige Berechnung quasi nicht möglich ist, wird nun versucht die Kreditausfälle mittels gleichverteilter Zufallszahlen[11] zu simulieren. Hierzu könnte man das Simulieren auch durch Auswürfeln ersetzen. Dabei macht man sich durch sehr viele Simulationsläufe das Gesetz der großen Zahlen[12] zu Nutze.

Pro Simulationslauf geht man dabei so vor, dass für jeden Kredit mit einer Ausfallrate (PD) zwischen 0 und 100 % eine Zufallszahl zwischen 0 und 100 % erzeugt wird. Ist die Zufallszahl dabei kleiner oder gleich der Ausfallrate, gilt der Kredit als ausgefallen. Ist die Zufallszahl größer, gilt der Kredit nicht als ausgefallen. Diesen Simulationslauf wiederholt man nun, zumindest in der Theorie, unendlich oft. Dies hat zur Folge, dass sich die simulierte Verlustverteilung der tatsächlichen Verlustverteilung (mit 2^n Verlustmöglichkeiten) annähert.

Die folgende Tabelle verdeutlicht das Vorgehen bei 5 Beispielkrediten und 5 Simulationsläufen[13].

[11] Ein Computer als deterministische Maschine kann eigentlich keine echten Zufallszahlen simulieren. Die ersatzweise erzeugten Zufallszahlen hängen daher von der Qualität der verwendeten Algorithmen und deren Startwerten ab. Dies soll an dieser Stelle jedoch nicht weiter untersucht werden. Der Microsoft Excel Zufallszahlengenerator wird daher für die Simulation als „ausreichend zufällig“ definiert.

[12] Das Gesetz der großen Zahlen besagt, dass sich die relative Häufigkeit eines Zufallsergebnisses immer weiter an die theoretische Wahrscheinlichkeit für dieses Ergebnis (Erwartungswert) annähert, je häufiger das Zufallsexperiment durchgeführt wird.

[13] In der Praxis werden mindestens etwa 5.000 bis zu 5.000.000 oder mehr Simulationsläufe durchgeführt.

Name	**PD**	**LGD**	**Lauf1**	**Lauf2**	**Lauf3**	**Lauf4**	**Lauf5**
Kredit1	5,00%	10.000 €	**2,88%**	43,72%	**2,98%**	24,84%	**4,98%**
Kredit2	10,00%	20.000 €	38,56%	21,88%	**9,78%**	87,85%	7,23%
Kredit3	7,00%	15.000 €	64,18%	33,96%	82,44%	9,25%	38,73%
Kredit4	3,00%	7.500 €	53,50%	**1,74%**	74,36%	29,15%	7,30%
Kredit5	4,00%	5.000 €	7,90%	13,82%	39,64%	44,84%	81,00%
Gesamtverlust pro Lauf			10.000 €	7.500 €	30.000 €	0 €	10.000 €

Verlust	**Einzelwahrscheinlichkeit**	**kummulierte Wahrscheinlichkeit**
0 €	20,00%	20,00%
7.500 €	20,00%	40,00%
20.000 €	40,00%	80,00%
30.000 €	20,00%	100,00%

* Beispiel einer Monte-Carlo-Simulation im 5 Durchläufen

Nun kann man den Verlusthöhnen Wahrscheinlichkeiten zuordnen und beispielsweise die Aussage treffen, dass zu 80 % ein Verlust von 20.000 € nicht überschritten wird. Führt man nun unendlich viele Simulationsläufe durch, wird sich beispielsweise die Einzelwahrscheinlichkeit für einen Verlust von 0 € an die Tatsächliche von 74,04 %[14] annähern.

Diese Methode ist zwar von ihrer Vorgehensweise her sehr einfach, doch hat sie zwei wesentliche Nachteile. Die Rechenzeit sich kann bei vielen Simulationsläufen einer großen Anzahl von Krediten bis in den Tagebereich ausweiten. Weiterhin erhält man bei mehreren Ausführungen von Simulationsläufen höchstwahrscheinlich niemals exakt identische Ergebnisse, da Zufallszahlen verwendet wurden. Man kann also nie ganz ausschließen, dass der Zufall einem nicht doch einen Streich gespielt hat. Hierzu bietet sich beispielsweise ein Ergebnisvergleich mit dem folgenden Modell an. Dadurch kann man zumindest grobe Ausreißer identifizieren.

[14] Berechnet aus dem Produkt der Gegenwahrscheinlichkeiten der PD´s (95 % x 90 % x 93 % x 97 % x 96 %)

4. Beispiel für ein analytisches[15] Modell (Vorstufe von CreditRisk+)

Die beiden für die Monte-Carlo-Simulation geltenden Nachteile kann man durch die Verwendung eines analytischen Modells nahezu ausschließen. Um aber die Berechnung aller 2^n Möglichkeiten zu umgehen, müssen zuerst wieder die Einschränkungen der Poissonverteilung gemacht werden. Bei der Poissonverteilung besteht jedoch noch das Problem, dass alle Kredite gleich groß sein mussten.

4.1. Ansatz für die Lösung der Größenrestriktion

Zu einer ersten Lösung dieser Größenrestriktion betrachten wir zunächst ein überschaubares Portfolio mit 15 Kreditexposures. Hierbei haben 10 Kredite ein einfaches[16] Exposure und 5 Kredite ein doppeltes Exposure. Hierzu berechnet man zunächst die beiden Poissonverteilungen P_1 und P_2 getrennt für die Kredite mit einfachem und doppelten Exposure. Zu beachten ist hier, dass ein Ausfall von „einem Stück" eines Kredites mit doppeltem Exposure auch ein Verlust in doppelter Höhe bedeutet.

Nun „faltet" man die beiden Wahrscheinlichkeitsverteilungen aufeinander. Hierzu setzt man für jede Verlusthöhe alle Möglichen Fälle zusammen. Eine exemplarische Berechnung für $P_{1\&2}(4)$ wird folgendermaßen durchgeführt:

$$P_{1\&2}(4) = P_1(4) \cdot P_2(0) + P_1(2) \cdot P_2(1) + P_1(0) \cdot P_2(2)$$

- 4 Kredite mit einfachem und 0 mit doppeltem Exposure fallen aus
  - Verlust des vierfachen Exposures
- 2 Kredite mit einfachem und 1 mit doppeltem Exposure fallen aus -> Verlust 4
  - Verlust des vierfachen Exposures
- 0 Kredite mit einfachem und 2 mit doppeltem Exposure fallen aus -> Verlust 4
  - Verlust des vierfachen Exposures

[15] Da die Grundidee des Modells ursprünglich aus der Versicherungsmathematik stammt, spricht man auch von einem aktuarischen Modell.
[16] Das Exposure ist hier eine dimensionslose Größe. Möglich wäre auch die Exposures zur besseren Veranschaulichung mit 1 € und 2 € zu definierten.

Die Zulässigkeit dieser Vorgehensweise ergibt sich aus dem Satz von Raikow. Danach ist die Summe unabhängig verteilter Zufallsvariablen (also die Gesamtzahl der Ausfälle im Kreditportfolio, die als Summe der Ausfälle in den verschiedenen Exposure-Bändern gegeben ist) dann poissonverteilt, wenn auch die einzelnen Summanden poissonverteilt sind

P_1, P_2 seien unabhängig und $P_1 + P_2 \approx P(\mu) \;\Rightarrow\;$ P_1 und P_2 sind poissonverteilt

Die komplette Faltung von P_1 und P_2 zu $P_{1\&2}$ ist in der folgenden Tabelle dargestellt.

einfache Exposures				doppelte Exposures				Kombination	
PD	Verlust	Anzahl	P1(Anzahl)	PD	Verlust	Anzahl	P1(Anzahl)	Verlust	P1&2(Anzahl)
1,00%	0	0	90,48%	1,25%	0	0	93,94%	0	85,00%
1,00%	1	1	9,05%					1	8,50%
1,00%	2	2	0,45%	1,25%	2	1	5,87%	2	5,74%
1,00%	3	3	0,02%					3	0,55%
1,00%	4	4	0,00%	1,25%	4	2	0,18%	4	0,19%
1,00%	5	5	0,00%					5	0,02%
1,00%	6	6	0,00%	1,25%	6	3	0,00%	6	0,00%
1,00%	7	7	0,00%					7	0,00%
1,00%	8	8	0,00%	1,25%	8	4	0,00%	8	0,00%
1,00%	9	9	0,00%					9	0,00%
1,00%	10	10	0,00%	1,25%	10	5	0,00%	10	0,00%
Summe			100,00%	Summe			100,00%	Summe	100,00%

* Faltung zweier Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Mit dem vorstellten Verfahren ist es nun möglich in einem gewissen Umfang auch unterschiedliche Kreditexposures zu berücksichtigen. Ist im Beispiel noch eine dritte Verteilung P_3 mit z.B. dreifachem Exposure vorhanden, muss $P_{1\&2\&3}$ nicht in einem Schritt ermittelt werden. Bei der Faltung gilt das Kommutativgesetz, so dass zuerst die Verteilung $P_{1\&2}$ berechnet werden kann, um diese dann mit P_3 zu $P_{1\&2\&3}$ zu falten.

4.2. Vorgehensweise bei der Verwendung von Exposure-Bändern

Die Schreibweise der folgenden Formeln orientiert sich größtenteils am CreditRisik+ Originaldokument der CSFB. Bereits eingeführte Variablen wie *n* für den Kreditnehmer (statt *A* bei CSFB) werden jedoch weiter aus Gründen der Kontinuität beibehalten.

Da es mit keiner der bekannten Verteilungsfunktionen möglich ist mit unterschiedliche Exposure Größen umzugehen, verwendet man so genannte Exposure-Bänder, die Kredite deren LGD ´s etwa gleich hoch sind zusammenfassen. Innerhalb der Exposure-Bänder können dann wieder Ausfälle in Stück berechnet werden. Den dazugehörigen Verlust erhält man durch die Multiplikation der Stückzahlen mit der Basiseinheit des Exposure-Bandes. Die einzelnen Verlustverteilungen pro Band kann man nun mittels der bereits Vorgestellten „Faltung“ zu einer Verlustverteilung zusammenführen. Die Vorgehensweise wird im Folgenden ausführlich dargestellt.

Zuerst ist die Basiseinheit *B* für das Exposure-Band zu definieren. Hierbei ist folgendes zu beachten. Wählt man eine zu geringe Anzahl ist die Größenklassenstruktur des Portfolios nur unzureichend abgebildet. Eine hohe Anzahl von Exposure-Bändern kann wiederum zur Folge haben, dass die die Anzahl der Kreditexposures in einzelnen Bändern nicht mehr näherungsweise die Forderung der unendlichen Anzahl von Kreditnehmen erfüllt. Die Poisson-Approximation liefert dort nur ungenaue Ergebnisse. Hierauf wird an späterer Stelle unter Punkt 5 noch genauer eingegangen. Die Forderung aus der unteren Formel den höchsten Einzel-LGD zu verwenden ist lediglich eine Empfehlung, die sich in den Folgeschritten als zweckmäßig erweist.

Formel: $B = \dfrac{LGD_{\max}}{Anzahl\ der\ Bänder}$

In einem nächsten Schritt werden die Verluste bei Ausfall (LGD) pro Kredit auf die Basiseinheit B normiert. Wurde beispielsweise *B = 100 €* gewählt, bedeutet ein LGD von 80 € ein Ausfall von „0,8 Stück“ der Basiseinheit *B · 0,8 = 80 €.* Die Variable *n* steht hier für die laufende Nummer des Kredites im Portfolio.

Formel: $v_n = \dfrac{LDG_n}{B}$

Die normierten Verluste bei Ausfall v_n werden nun ganzzahlig auf $\bar{v}_n$ aufgerundet[17]. Diese Rundung dient nur zur Feststellung zu welchem Band bzw. Vielfachen von *B* der Kredit zuzuordnen ist. Der vorangegangene Beispielkredit mit einem LGD von 80 € würde also Band mit der Nummer 1 zugeordnet. Der Index für den Bänder wird nachfolgend mit *j*, also im Beispiel *j = 1*, bezeichnet.

Formel: $v_n \rightarrow \bar{v}_n = j$

Nun werden auch die erwarteten Verluste auf die Basiseinheit B normiert. Ähnlich wie im vorangegangenen Schritt bedeutet nun, dass der Kredit mit einem LGD von 80 € bei einer PD von 10 % einen erwarteten Verlust von 8 € also ε = 0,08 Stück Basiseinheiten aufweist.

Formel: $\varepsilon_n = \dfrac{LGD_n \cdot PD_n}{B}$

Jetzt werden die normierten, erwarteten Verluste aller Kredite mit gleichem $\bar{v}_n$ bzw. *j* zu μ_j kumuliert (zusammengefasst). Dadurch erhält man pro Band die Anzahl des erwarteten Ausfallvolumens. Der Bereich aller *n´s* deren v_n, die durch v_j dargestellt bzw. darin zusammengefasst werden ist bei ganzzahliger Aufrundung *[B·(j-1), B·j)*. Vor dem Kumulieren wird noch durch *j* bzw. die Rundung von v_n geteilt. Hiermit erhält man pro Band die Anzahl der erwarteten Ausfälle in Stück.

Formel: $\mu_j = \sum_{n:v=v_j} \dfrac{\varepsilon_n}{\bar{v}_n}$ bzw. ohne Zwischenschritt $\mu_j = \sum_{n:v=v_j} \dfrac{\frac{LGD_n \cdot PD_n}{B}}{\bar{v}_n}$

Dadurch ist zu beachten, dass hierdurch ein gewisser Quanitsierungsfehler[18] entsteht, da ein Teil der Informationen über das Portfolio verloren geht. Bei μ_1 = 80 € ist nun dessen Ursprung nicht mehr eindeutig feststellbar. Es könnten ein Kredit á 80 € oder auch zwei Kredite á 40 € gewesen sein, die zu diesem Ergebnis führten.

[17] Empfehlung - möglich wäre auch eine kaufmännische Rundung oder Abrundung. Eine Gegenüberstellung erfolgt bei 4.4.

[18] Von der Anschauung bzw. dem Klangeindruck her vergleichbar mit der Bit-Rate einer CD-Audio, die die Amplitude des Tonsignals in 2^{16} „Amplituden-Bänder“ einsortiert. Bei 2^8 Bändern ist bereits ein merklicher Klangqualitätsverlust zu hören – die Geräusche sind aber noch deutlich erkennbar.

Quasi unendlich viele Möglichkeiten sind denkbar. Daher ist es wichtig die Basiseinheit für das Exposure-Band B nicht zu groß zu definierten, um den Informationsverlust der Kredite innerhalb eines Bandes nicht zu hoch werden zu lassen. Würde man $B = LGD_{max}$ definieren, hätte man das Modell auf ein einziges Band reduziert. Die Informationen über die Größenklassen im Portfolio wären damit völlig verloren gegangen. Auf der anderen Seite darf man *B* auch nicht so klein wählen, dass die Anforderung ausreichend vieler[19] Kreditnehmer in einem Band nicht mehr gegeben ist. Diese Anforderung wird in der Regel bei einem normalen Portfolio dadurch ohnehin etwas verletzt, da große Kredite nur in geringer Anzahl vorhanden sind. Diese sind dann häufig der einzige Kredit in einem Exposure Band. Dies ist zumindest dann tolerierbar, wenn die großen Kredite kleine Ausfallraten aufweisen und damit nur mit geringen Approximationsfehlern aus der Poissonverteilung einfließen. Als Faustregel lässt sich die Aussage treffen, dass die Verwendung von 50-250[20] Bändern gute Ergebnisse liefert

Mit den vorliegenden Werten für μ_j kann nun für jedes Exposure-Band mit dem Index *j* eine einzelne Poissonverteilung berechnet werden. Da die Poissonverteilung nur Wahrscheinlichkeiten für *k* Ereignis-Anzahlen liefert, muss für die Bestimmung der Verlusthöhen die jeweilige Anzahl noch mit dem Bandindex *j* und der Basiseinheit *B* multipliziert werden. Die Eintrittswahrscheinlichkeiten erhält man wie folgt:

Formel: $P_{\mu_j}(k) = \frac{{\mu_j}^k}{k!} e^{-\mu_j}$ und deren Verteilungsfunktion $F_{\mu_j}(k) = e^{-\mu_j} \sum_{i=0}^{k} \frac{{\mu_j}^i}{i!}$

Ergänzend gilt für das gesamte Verlustvolumen im *j*-sten Band $= k_j \cdot j \cdot B$.

Die nun gewonnenen Poissonverteilungen für jedes einzelne Exposure-Band lassen sich wie bereits vereinfacht dargestellt zu einer einzigen Verlustverteilung „falten“. Diese Vorgehensweise ist anschaulich aber bei einer hohen Anzahl von Exposure-Bändern äußerst aufwendig. Auch wenn dies deutlich weniger Aufwand ist als alle 2^n Möglichkeiten zu bestimmen, ist diese Art der Faltung auch schlecht für eine Automation mittels Computerprogramm geeignet.

[19] Vgl. Poissonverteilung auf Seite 7
[20] Der Credit-Portfolio-Manager der Software ifb-Okular 4.3 verwendet immer eine fest definierte Anzahl von 100 Bändern

4.3. Die Panjer-Rekursion[21]

Einfacher als mit der manuellen Faltung ist die Berechnung der Verlustverteilung mittels der Panjer-Rekursion[22]. Der Algorithmus ist besonders für eine Verwendung in Tabellenkalkulationen geeignet. Auch entfällt auch die dauernde Berechnung der Fakultät für die Poissonverteilung.

Formel: $R_0 = e^{-\sum_{j=1}^{m} \mu_j}$ Startwert für die Verlustwahrscheinlichkeit von Null.

($\sum_{j=1}^{m} \mu_j$ steht für die gesamte Anzahl der erwarteten Verluste in Stück.)

$R_k = \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{\varepsilon_j}{k} \right) \cdot R_{k-j}$ Rekursion für die Folgewerte

Die Variable *k* bezeichnet hier die Anzahl der Kreditausfälle als Vielfaches von *B*.

Exkurs - Herleitung der Panjer-Rekursion :

Die Panjer-Rekursion wird zur Berechnung der Panjer-Verteilung herangezogen, die eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, welche die Verteilungen Negative Binomialverteilung, Binomialverteilung und Poissonverteilung in einer Verteilungsklasse vereint. Sie wird in der Versicherungsmathematik als Schadenzahlverteilung eingesetzt, da ihre spezielle rekursive Struktur einen effizienten Algorithmus zur Berechnung der Gesamtschadenverteilung eines Versicherungsportefeuilles ermöglicht. Im Folgenden wir die Panjer-Rekursion jedoch nur im Hinblick auf die Poissonverteilung näher betrachtet bzw. dieser eine Spezialfall der Panjer-Verteilung aus der Poissonverteilung hergeleitet.

Für die Poissonverteilung gilt die bereits hergeleitete Formel: $P_\mu(k) = \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu}$

Die Berechnung kann durch eine rekursive Berechnung ersetzt werden. Hierzu

[21] Insurance Risk Models by Harry H. Panjer and Gordon E. Willmot (1992)
[22] Diese Vorgehensweise wird auch in der ursprünglichen Spezifikation von CreditRisik+ von der CSFB vorgeschlagen. Bei sehr vielen Kreditnehmern führt diese Rekursion zwangsläufig zur Instabilität aufgrund von Rundungsfehlern. Vgl. Deutsches Risk Juli 2003 S. 40 ff.

substituiert man *k!* durch:

$k! = \prod_{i=1}^{k} k - (i-1)$ und damit gilt:

$$P_\mu(k) = \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu} = \prod_{i=1}^{k} \frac{\mu}{k-(i-1)} \cdot e^{-\mu} = e^{-\mu} \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{\mu}{k-(i-1)}$$

Die Poissonverteilung berechnet sich also nun aus $e^{-\mu}$ multipliziert mit dem Produkt der Quotienten von *μ.* Anders ausgedrückt bedeutet dies:

$$P_\mu(k) = \frac{\mu}{k} \cdot P_\mu(k-1) \qquad k \geq 1\,.$$

Für *k = 0* ergibt sich aufgrund der Normierungsbedingung…

$$\sum_{ki=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu} = e^{-\mu} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} = 1$$

…trotz der fehlenden Definition von *μ / 0* die Formel:

$$P_\mu(0) = e^{-\mu}$$

Auch wurde bereits bewiesen, dass die Poissonverteilung reproduktiv ist. Daher kann auch die Faltung mehrerer Poissonverteilungen in die rekursive Berechnung integriert werden und es gilt:

$P_{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}(k) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\right)^k}{k!} \cdot e^{-\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\right)}$ bzw. rekursiv dargestellt: $P_{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}(k) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\right)}{k} \cdot P_{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}(k-1)$

Als eigentlicher Beweis steht nun an, Poissonverteilungen mittels einer rekursiven Berechnung miteinander zu falten, deren Ereignisse unterschiedlich „gewichtet“ sind.

<u>Die weitere Beweisführung ist in dieser Version noch offen.</u>

4.4. Beispielrechnung mit 10 Krediten

Die Beispielrechnung zeigt das soeben dargestellte Vorgehen noch einmal anhand von detaillierten Einzelschritten.

Name	LGD	PD	EL (LGD x PD)
Kredit 1	55.000 €	4,00%	2.200,00 €
Kredit 2	110.000 €	1,00%	1.100,00 €
Kredit 3	175.000 €	7,50%	13.125,00 €
Kredit 4	210.000 €	0,50%	1.050,00 €
Kredit 5	225.000 €	3,25%	7.312,50 €
Kredit 6	415.000 €	1,20%	4.980,00 €
Kredit 7	440.000 €	1,15%	5.060,00 €
Kredit 8	580.000 €	2,45%	14.210,00 €
Kredit 9	595.000 €	3,65%	21.717,50 €
Kredit 10	600.000 €	0,85%	5.100,00 €
Summe	3.405.000 €		75.855 €

* Beispielportfolio

Zunächst ist die Basiseinheit bzw. die Anzahl der Exposure-Bänder festzulegen. Für dieses Beispiel werden insgesamt 6 Bänder mit einer Basiseinheit von 100.000 € gewählt.

Nun werden LGD und EL nicht mehr in Geldeinheiten, sondern in Vielfachen der Basiseinheit ausgedrückt. Der LGD in Basiseinheiten wird zusätzlich noch ganzzahlig aufgerundet. Hiermit ist nun festgelegt welchem Exposure-Band der Kredit zugeordnet ist.

Name	LGD	PD	EL (LGD x PD)	v = LGD / B	ε = EL / B	rnd(v) -> j
Kredit 1	55.000 €	4,00%	2.200,00 €	0,5500	0,0220	1
Kredit 2	110.000 €	1,00%	1.100,00 €	1,1000	0,0110	2
Kredit 3	175.000 €	7,50%	13.125,00 €	1,7500	0,1313	2
Kredit 4	210.000 €	0,50%	1.050,00 €	2,1000	0,0105	3
Kredit 5	225.000 €	3,25%	7.312,50 €	2,2500	0,0731	3
Kredit 6	415.000 €	1,20%	4.980,00 €	4,1500	0,0498	5
Kredit 7	440.000 €	1,15%	5.060,00 €	4,4000	0,0506	5
Kredit 8	580.000 €	2,45%	14.210,00 €	5,8000	0,1421	6
Kredit 9	595.000 €	3,65%	21.717,50 €	5,9500	0,2172	6
Kredit 10	600.000 €	0,85%	5.100,00 €	6,0000	0,0510	6
Summe	3.405.000 €		75.855 €		0,7586	

In einem nächsten Schritt werden die auf die Basiseinheit normierten EL´s pro Kreditnehmer also *ε* pro Band kumuliert.

Name	**LGD**	**PD**	**ε = EL / B**	**j**	**µ = ε / j**	**∑ε**
Kredit 1	55.000 €	4,00%	0,0220	1	0,0220	0,0220
Kredit 2	110.000 €	1,00%	0,0110	2	0,0055	0,1423
Kredit 3	175.000 €	7,50%	0,1313	2	0,0656	
Kredit 4	210.000 €	0,50%	0,0105	3	0,0035	0,0836
Kredit 5	225.000 €	3,25%	0,0731	3	0,0244	
Kredit 6	415.000 €	1,20%	0,0498	5	0,0100	0,1004
Kredit 7	440.000 €	1,15%	0,0506	5	0,0101	
Kredit 8	580.000 €	2,45%	0,1421	6	0,0237	
Kredit 9	595.000 €	3,65%	0,2172	6	0,0362	0,4103
Kredit 10	600.000 €	0,85%	0,0510	6	0,0085	
Summe	3.405.000		0,7586		0,2095	0,7586

Mit den vorliegenden Daten kann nun mittels Panjer-Rekursion die Verlustverteilung berechnet werden. Auf eine Darstellung mittels manueller Faltung der fünf Poissonverteilungen wird aufgrund des Umfangs verzichtet. Hierfür muss noch *µ* einmal einzeln pro Band kumuliert werden bzw. die kumulierten *ε* durch die Bandnummer geteilt werden. Hierdurch erhält man dann die Ausfälle in Stück pro Band. Im Band 6 wären das *0,4103 / 6 = 0,06838* Stück.

Anzahl Ausfälle in Basiseinheiten	**Verlustverteilung**		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
	"exakte Verteilung"	*∑µ(1-6)* 0,2095	*∑ε(1)* 0,0220	*∑ε(2)* 0,1423	*∑ε(3)* 0,0836	*∑ε(4)* 0,0000	*∑ε(5)* 0,1004	*∑ε(6)* 0,4103
0	80,79%	81,10%						
1	1,82%	1,78%	1,78%					
2	6,12%	5,79%	0,02%	5,77%				
3	2,44%	2,39%	0,04%	0,08%	2,26%			
4	0,08%	0,26%	0,01%	0,21%	0,04%	0,00%		
5	1,81%	1,79%	0,00%	0,07%	0,10%	0,00%	1,63%	
6	5,73%	5,62%	0,01%	0,01%	0,03%	0,00%	0,03%	5,55%
7	0,25%	0,24%	0,02%	0,04%	0,00%	0,00%	0,08%	0,10%
8	0,48%	0,45%	0,00%	0,10%	0,02%	0,00%	0,03%	0,30%
9	0,17%	0,17%	0,00%	0,00%	0,05%	0,00%	0,00%	0,11%
10	0,02%	0,04%	0,00%	0,01%	0,00%	0,00%	0,02%	0,01%
11	0,13%	0,12%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,05%	0,07%
12	0,12%	0,20%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,19%
13	0,01%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%
14	0,01%	0,02%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%
15	0,00%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Summe	100,00%	100,00%						

Die berechnete Verlustverteilung gibt nun die Wahrscheinlichkeiten für den Verlust in Vielfachen der Basiseinheit *B* an. Das dem vierten Band keine Kredite zugeordnet wurden ist unproblematisch. Man könnte es auch in der Rekursion unbeachtet lassen und nach Band 3 direkt Band 5 anschließen. Mit der Bezeichnung „exakte Verteilung" ist noch die Verlustverteilung ohne die Approximationsfehler angegeben. Hierbei wurden allerdings $LDG = j \cdot B$ und $PD = \varepsilon = EL / B$ verwendet, um den Quantisierungsfehler durch das Verwenden der Exposure Bänder zu neutralisieren. Diese Berechnung[23] daute für die 10 Beispielkredite nur wenige Sekunden. Das exponentielle Ansteigen der Rechenzeit mit der Anzahl der Kredite macht aber deutlich, dass dieses Verfahren keine echte Alternative darstellt. Der Vergleich der beiden Verteilungen zeigt, dass trotz der des recht starken Verletzens der Restriktion $n \to \infty$ die Abweichungen noch akzeptabel sind. Grund hierfür ist, dass die Restriktion $\mu / n \to 0$ bzw. $PD / Kreditanzahl \to 0$ insgesamt noch recht gut eingehalten wurde. Die untere Tabelle zeigt dies nochmals mittels einer Gegenüberstellung der Verteilungsfunktionen. Die einzelnen Konfidenzniveaus werden bei beiden Verlustverteilungen nahezu gleichzeitig erreicht.

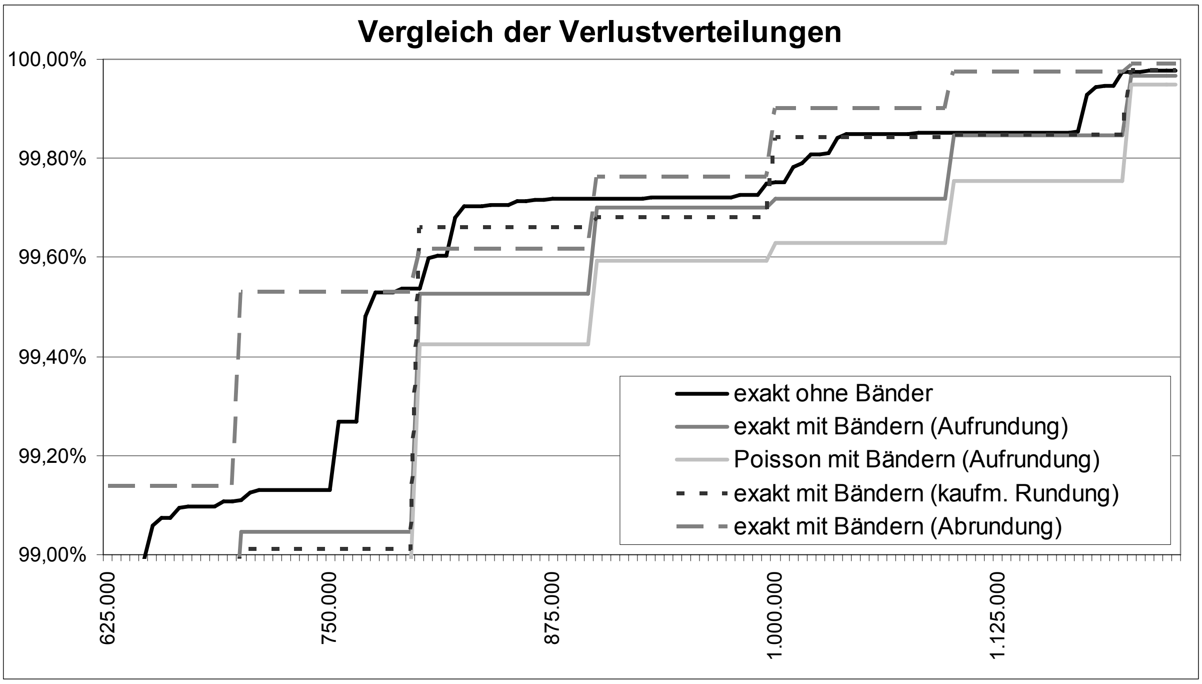
Verlust in B	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
exakt	5,73%	0,25%	0,48%	0,17%	0,02%	0,13%	0,12%	0,01%	0,01%	0,00%
∑ exakt	98,79%	**99,05%**	99,53%	99,70%	99,72%	99,85%	**99,97%**	99,98%	**99,99%**	100,00%
Poisson	5,62%	0,24%	0,45%	0,17%	0,04%	0,12%	0,20%	0,01%	0,02%	0,01%
∑ Poisson	98,73%	98,98%	**99,42%**	99,59%	99,63%	99,75%	**99,95%**	99,96%	99,98%	**99,99%**

Da die Auswirkungen des Quantisierungsfehlers ebenfalls Beachtung finden sollten, ist in der folgenden Grafik zusätzlich die exakte Verlustverteilung ohne Exposure-Bänder dargestellt bzw. wurde hier $B = 5.000$ gewählt, was keine Rundungen der Exposures mehr notwendig macht. Deutlich zu sehen ist hier, dass sich die exakte Verlustverteilung ohne Bänder detaillierter anwächst. Die anderen beiden Funktionen haben definitiondbedingt nur die Möglichkeit alle 100.000 €[24] anzuwachsen. Für die Rundungsregeln lassen sich folgende Aussagen ableiten, die noch durch eine Grafik (Ausschnitt der kumulierten Wahrscheinlichkeiten) visualisiert werden. Wichtig ist

[23] Hierbei handelte es sich um einen Algorithmus, der die Wahrscheinlichkeiten aller 2^{10} Möglichkeiten durch Ausprobieren ermittelte.
[24] Anzumerken bleibt, dass mit *B = 100.000* für das Beispielportfolio ein relativ hoher Wert gewählt wurde. Kleine Werte für *B* lassen den Quantisierungsfehler deutlich geringer werden.

hierbei, dass bei einer eventuellen Abrundung eines LGD auf 0 dennoch das Band 1 zu verwenden ist, da es sonst unter Anderem zu Abweichungen im EL kommt.

- **Aufrundung (Empfehlung)** – i.d.R. Risikoüberschätzung, da die Kurve langsamer ansteigt.
- **kaufmännische Rundung** – je nach Quantil tritt sowohl eine Unter- als auch eine Überschätzung des Risikos ein.
- **Abrunden** – i.d.R. Risikounterschätzung, da die Kurve schneller ansteigt.
- Die Anwendung der Poissonverteilung führt, wie bereits ausführlich erläutert, immer zu einer zusätzlichen Risikoüberschätzung (Verlangsamung des Kurvenanstiegs).



Damit erhielte man im Beispiel durch kaufmännische Rundung mit Poissonverteilung (nicht in der Grafik enthalten), abgesehen von der Variante ohne Rundung, die beste Risikoapproximation. In der Praxis sind solche Vergleiche jedoch aufgrund der unbekannten exakten Verlustverteilung ohne Rundung nicht möglich. Daher empfiehlt sich die Aufrundung als konservative Variante und die kaufmännische Rundung als etwas präzisiere mit der teilweisen Gefahr der Risikounterschätzung. In der Praxis hätte man für dieses Beispielportfolio jedoch mindestens 50 Exposure-Bänder verwendet. Damit sind die Unterschiede der einzelnen Rundungsvorschriften deutlich geringer als in diesem Beispiel dargestellt.

5. Vergleich der beiden Modelle

Die beiden vorgestellten Modelle zeigen, dass es das eine und richtige Kreditrisikomodell nicht gibt. Alle Ansätze haben ihre Vor- und Nachteile. Somit kann es sinnvoll sein ein Potfolio mit beiden Ansätzen zu untersuchen und beide Ergebnisse zu vergleichen. Hierdurch können die Nachteile aus den Modellrestriktionen teilweise etwas kompensiert werden.

Bei der Monte-Carlo-Simulation fällt insbesondere die hohe Rechenzeit negativ auf. Auch sind die Ergebnisse durch die Verwendung der Zufallsvariablen niemals exakt gleich. Kritisch formuliert weiß man nie wann man das richtige Ergebnis vorliegen hat. Dafür macht man sonst keine weiteren Kompromisse, die bei der Ergebnisinterpretation noch zu berücksichtigen wären. Erfüllen also die Simuationsläufe das Gesetz der großen Zahlen, ist das Ergebnis ohne Einschränkung verwendbar.

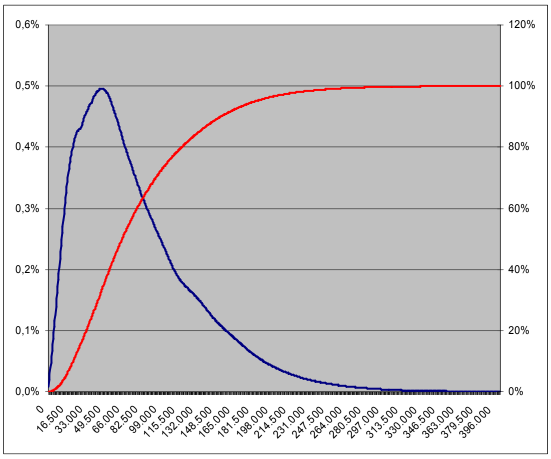
Das Grundmodell von CreditRisk+ liefert bereits nach kurzer Rechenzeit Ergebnisse, die auch bei jeder Berechnung identisch sind. Erkauft wird dies jedoch durch einige Modellrestriktionen, die bereits beschrieben wurden. Ein Kreditportfolio, das die Restriktionen vollständig erfüllt, dürfte es nicht geben. Mehr oder weniger kleine Verletzungen der Modellrestriktionen werden also immer auftreten. Wichtig ist es beim Grundmodell von CreditRisk+ diese zu kennen und gegebenenfalls bei der Ergebnisinterpretation zu berücksichtigen. So ist es durchaus akzeptabel, dass sich große Kredite alleine in einem Exposure-Band befinden. Viel gravierender ist die Auswirkung auf das Ergebnis, wenn die Kredite in einem Exposure-Band, unabhängig von der Anzahl im Mittel eine sehr hohe Ausfallrate aufweisen. Dann kommt es zu dem Effekt, dass angeblich mehr Kredite ausfallen können als im Exposure-Band überhaupt vorhanden sind. Dies führt im Gesamtportfolio dazu, dass das Risiko überschätzt wird. Ab einem bestimmten Konfidenzniveau ist das Risiko dann höher als die Gesamtexposition (LGD_{Gesamt}) des Portfolios. Wann dieser Approximationsfehler nicht mehr akzeptabel ist, lässt sich pauschal nicht festlegen, da dies immer auf das zugrunde gelegte Portfolio ankommt.

Enthält das Portfolio einen bzw. wenige sehr große Einzelkredite, kann dies dazu führen, dass der Rest des Portfolios nur einem einzigen Exposure-Band zugeordnet wird. Die Größenklassenstruktur geht hierdurch größtenteils verloren (Risikounterschätzung). Ist die PD dieser Einzelkredite hoch, führt dies dazu, dass der Approximationsfehler dieser Kredite im Gesamtportfolio wiederum zu einer deutlichen Risikoüberschätzung führt. Ist die PD wiederum sehr klein, überwiegt die Risikounterschätzung der kleineren Kredite, die sich alle in einem Exposure-Band befinden. Dieser Fall dürfte in der Praxis aber kaum auftreten, da diese sehr großen Einzelkredite fast um die Anzahl der Bänder höher sein müsste als die übrigen Kredite im Durchschnitt, also Faktor 50 – 250.

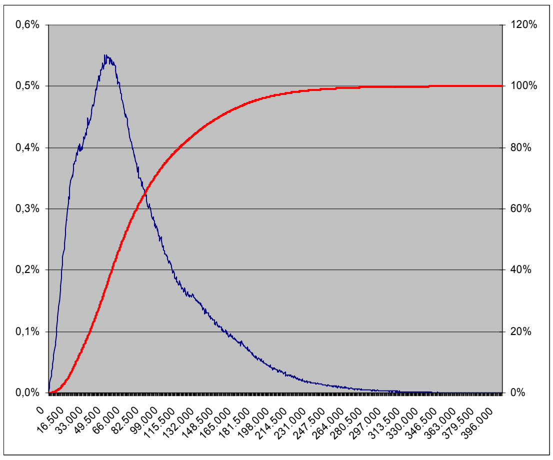
Für Normalfälle lässt sich also die Aussage treffen, dass man im hier gemachten Vergleich mit der Vorstufe von CreditRisk+ das Risiko tendenziell etwas überschätzt. Die zeigt sich auch anhand der bereits berechneten (voreingestellten) Verlustverteilungen im Excel Programmbeispiel.

5.1. Vergleich der Ergebnisse aus dem Excel Programmbeispiel

Der soeben durchgeführte allgemeine Modellvergleich lässt sich an folgendem Beispiel noch etwas weiter vertiefen. Hier wurde die Verlustverteilung im analytischen Modell mit 250 Exposure Bändern berechnet. Die Monte-Carlo-Simulation basiert auf 2.500.000 Simulationsläufen mit einer Rechenzeit von ca. 3 Tagen. Beiden Modellen wurde das Beispielportfolio aus dem Excel Programmbeispiel zu Grunde gelegt.



Verlustverteilung im analytischen Modell



Verlustverteilung im simulativen Modell

Ergebnisse

- Erwartungswert (EL)	78.253 €
- Qualtil (99,00 %)	248.500 €
- Qualtil (99,90 %)	332.500 €
- Qualtil (99,99 %)	409.500 €
- VaR (99,00 %)	170.247 €
- VaR (99,90 %)	254.247 €
- VaR (99,99 %)	331.247 €
- EKM (99,00 %)	2,1756
- EKM (99,90 %)	3,2490
- EKM (99,99 %)	4,2330

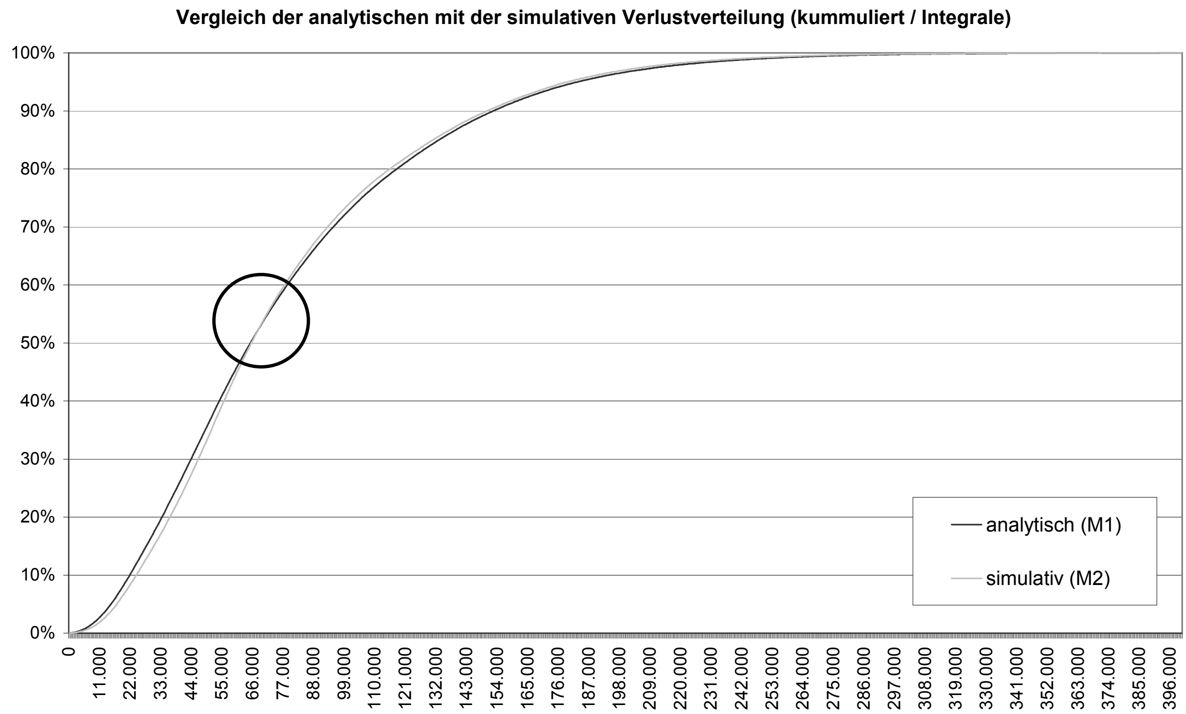
Ergebnisse

- Erwartungswert (EL)	78.239 €
- Qualtil (99,00 %)	241.000 €
- Qualtil (99,90 %)	317.500 €
- Qualtil (99,99 %)	387.000 €
- VaR (99,00 %)	162.761 €
- VaR (99,90 %)	239.261 €
- VaR (99,99 %)	308.761 €
- EKM (99,00 %)	2,0803
- EKM (99,90 %)	3,0581
- EKM (99,99 %)	3,9464

Zunächst zeigt sich bei der Verlustverteilung (blaue Kurve), dass im Simulationsmodell ein unruhigerer Kurvenverlauf entsteht. Grund hierfür ist die Unvollkommenheit der Simulation, da nur 2.500.000 ($\approx 2^{21}$) der $2^{1.711}$ möglichen Szenarien berechnet wurden. Würde man die Anzahl der Simulationen weiter erhöhen, entsteht ein immer ruhigerer Kurvenverlauf. Dennoch zeigt sich ein markanter Knick bei 35.000 € im analytischen Modell auch in abgeschwächter Form in der Monte-Carlo-Simulation.

Bei der Verteilungsfunktion (rote Kurve) gleicht sich dies größtenteils wieder aus. Etwas umgangssprachlich formuliert liegt dies an der „gleichmäßigen Unvollkommenheit“ der Simulation. Abweichungen der Wahrscheinlichkeiten von der tatsächlichen Verlustverteilung treten nahezu gleichmäßig positiv wie negativ auf. Durch die Kumulation bei der Verteilungsfunktion gleichen sich diese größtenteils wieder aus, so dass hier nur die saldierte Abweichung auftritt.

Die beiden roten Verteilungsfunktionen unterscheiden sich in den Grafiken kaum voneinander. Einen genauen Vergleich lässt die folgende Grafik zu.



Die simulative Verteilungsfunktion beginnt zunächst unterhalb der analytischen Verteilungsfunktion und bewegt sich ab dem Schnittpunkt bei etwa 70.000 € dann oberhalb. Somit erreicht die simulative Verteilungsfunktion ihre Konfidenzniveaus von 99 % oder höher etwas früher bzw. bei geringeren Risikoangaben. Daraus ergibt sich, dass der analytische Ansatz das Risiko hier etwas höher einschätzt. Dies ist auch aus den bereits erläuterten Approximationsfehlern durch Aufrundung der Exposure-Bänder und die Näherung mittels Poissonverteilung erklärbar. Würde bei einem Portfolio wie dem Beispielportfolio das simulative Ergebnis die höheren Risiken ausweisen, ist mit hoher Sicherheit die Anzahl der Simulationsläufe zu gering, da die Poissonapproximation das Risiko in der Regel immer etwas überschätzt.

6. Excel Programmbeispiel

Das anhängende Programmbeispiel ermöglicht es aus einem Portfolio die Verlustverteilungen auf die beiden vorgestellten Arten zu berechnen und miteinander zu vergleichen. Der Visual Basic Programmcode ist mit ausführlichen Kommentarzeilen versehen und wird daher hier nicht weiter erläutert. Ein eigenes Portfolio kann auch aus einem Datenexport von ifb-okular KRM v4.5 importiert werden. Manuelles Editieren ist ebenfalls möglich. Hierbei werden jedoch nicht Unplausibilitäten wie Ausfallraten über 100 % abgeprüft. Dies führt unter Umständen zu Programmabbrüchen.

Excel-Programmbeispiel[25] -> (ab Acrobat 7.0 oder höher)

Word Originaldatei (Grundlagen Kreditrisikomodelle)
-> (ab Acrobat 7.0 oder höher)

7. Literaturverzeichnis und Internet-Links

- CreditRisk+ von Credit Suisse First Boston
  - http://www.csfb.com/institutional/research/credit_risk.shtml
- Versicherungsmathematische Risikomessung für ein Kreditportfolio von Frank Lehrbass
  - http://www.gloriamundi.org/detailpopup.asp?ID=453055140
  - http://www.gloriamundi.org/picsresources/flibrt.pdf
- Kreditportfoliomodelle von Oliver Dunemann
  - http://fusion.cs.uni-magdeburg.de/pubs/kreditportfolio.pdf
- Eine Weiterentwicklung des CreditRisk+ Modells von Götz Giese
  - http://db.riskwaters.com/global/risk/foreign/deutsches/July2003/page39-44.pdf
- Fachkonzept Kreditportfoliomodell (2000)
  vom Bundesverband der Volks- und Raiffeisenbanken e.V. (BVR)
  - nicht öffentlich verfügbar.
- Software KRM und VR-CPM aus der Reihe ifb-okular der Firma ifb AG

[25] Zur Verwendung muss in Excel das Ausführen von Makros zugelassen sein.

8. Versionsübersicht (changelog)

- ***Fassung April 2006***
  - *Die Herleitung für den Erwartungswert der Poissonverteilung auf den Seiten 14 & 15 war bezüglich der Formeln zwar korrekt, aber die textlichen Erläuterungen waren ein wenig unplausibel und wurden daher komplett überarbeitet.*
- ***Fassung Februar 2006***
  - *kleinere Korrekturen im Text*
  - *hinzugefügt: Exkurs Binomialkoffenzient und Binomialverteilung Seite 8.*
  - *hinzugefügt: Exkurs Poissonverteilung Seite 12.*
- ***Fassung Januar 2006***
  - *erste Version*