Grundlagen Optionspreismodelle

(Fassung – Oktober 2007)

Back&Scholes[1]

$$C = A \cdot \mathrm{N}(d_1) - X \cdot e^{-(z \cdot t)} \mathrm{N}(d_2)$$

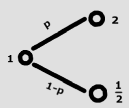
$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{A}{X}\right) + \left(z + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma \cdot \sqrt{t}} = d_2 + \sigma \cdot \sqrt{t}$$

Black76[2]

$$C = e^{-(z \cdot t)} \left(F \cdot \mathrm{N}(d_1) - X \cdot \mathrm{N}(d_2)\right)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{X}\right) + \left(\frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma \cdot \sqrt{t}} = d_2 + \sigma \cdot \sqrt{t}$$

Cox-Ross-Rubinstein[3] – Binomialmodell



Markus Schieche

Email: mail@markus-schieche.de
Homepage: www.markus-schieche.de

[1] Black, F. and M. Scholes (1973) *The Pricing of Options and Corporate Liabilities /* Merton, R.C.(1973), *The Theory of Rational Option Pricing*
[2] Oft auch nur „Black-model“ genannt. Black F. (1976). *The pricing of commodity contracts*
[3] Cox JC, Ross SA & Rubinstein M. (1979), *Options pricing: a simplified approach*

Vorwort

Bis zur Veröffentlichung des Black & Scholes Modells im Jahr 1973 existierte kein entsprechendes Modell um Optionspreise rechnerisch mit einem geschlossenen Funktionsausdruck zu bestimmen. Dies drückte sich in den früheren Jahren meist durch geringe Marktliquidität und hohe Geld- / Briefspannen aus. Im Jahr 1976 folgte noch ein ähnliches unter dem Namen Black76 bekanntes Modell und 1979 das Cox-Ross-Rubinstein Modell, welches als Binomialmodell zunächst einen völlig anderen Ansatz zu verwenden scheint, aber eine Konvergenz[4] gegen die beiden erstgenannten Modelle aufweist.

1973: Geburtsstunde des organisierten Optionshandels und der modernen Optionspreistheorie

Das Jahr 1973 markiert in doppelter Hinsicht einen Durchbruch in der Entwicklung der modernen Finanzmärkte. Im April dieses Jahres begann in der Raucher Lounge des Chicago Board of Trade der börsenmässige Handel von Calloptionen auf insgesamt 16 amerikanische Aktien. Dies erscheint vielleicht als bescheidener Start, stellt aber eine revolutionäre institutionelle Innovation dar: Anstatt dass Optionsrechte in verbriefter Form an der Börse gehandelt werden (z.B. *warrants*), stellen Market Makers (schon am ersten Tag waren es 284 an der Zahl!) verbindliche Geld- und Briefkurse für hinsichtlich Ausübungspreis und Laufzeit standardisierte Kontrakte. Gegenpartei der Geschäfte ist die Börse, welche sich gegenüber der Zahlungsfähigkeit der Kunden durch ein ausgeklügeltes Margensystem absichert. Diese Handelsstruktur stellt hinsichtlich Liquidität, Geschwindigkeit, Transparenz und Preisbildung eine Revolution gegenüber dem konventionellen Börsenhandel dar. Dementsprechend rasant wuchsen Handelsvolumen und Produktpalette am neu errichteten Floor der Chicago Board Options Exchange (CBOE). Weitere kompetitive Options- und Futuresbörsen sind wenig später entstanden. *[Quelle unbekannt – Internet]*

In diesem Text geht es hauptsächlich darum die hinter den drei Modellen steckende Idee zu erläutern. Der mathematische Beweis für den Funktionsausdruck[5] von Black & Scholes bzw. Black76 wird hierbei nicht geführt. Es wird jedoch vorausgesetzt,

[4] Cremers, Heinz (2000), *Konvergenz der binomialen Optionspreismodelle gegen das Modell von Black/Scholes/Merton*

[5] Die Herleitung des Funktionsausdrucks der Black & Scholes bzw. Black76 Formel zur Optionspreisbestimmung setzt einiges an mathematischen Vorkenntnissen voraus. Die Mathematik hinter dem Black&Scholes-Modell beruht im Wesentlichen auf der 1944/46 von Itō Kiyoshi begründeten Theorie der stochastischen Differentialgleichungen. Hier spielt der Wiener-Prozess die zentrale Rolle im Kalkül der zeitstetigen stochastischen Prozesse. Benannt wurde der Prozess, der auch als Brownsche Bewegung bekannt ist, nach dem amerikanischen Mathematiker Norbert Wiener.

dass die Grundlagen zu den Funktionsweisen von (europäischen) Optionen, insbesondere Aktienoptionen, bereits bekannt sind[6]. Alle Erläuterungen erfolgen im gesamten Text am Beispiel einer Call-Option.

Eine zentrale Größe mit der alle Modelle arbeiten ist die Volatilität des Basiswertes. Hierbei unterstellen die Modelle, dass die später noch erläuterten stetigen Verzinsungen der Kursänderungen einem so genannten *random-walk*[7] folgen und damit der Annahme einer Normalverteilung[8] entsprechen, was dem Kursverhalten in der Realität jedoch nur approximativ entspricht. Eine umfassende Untersuchung hierzu bietet der Artikel *„Random Walks in Stock Market Prices“* von Eugene F. Fama. Daher wird zunächst detailliert die Ermittlung der Volatilität beschrieben und diese interpretiert, da eine nur oberflächliche Kenntnis über die Volatilität das Verständnis der Optionspreismodelle stark erschwert.

Anschließend wird mit der Erläuterung des binomialen Cox-Ross-Rubinstein Modells begonnen, da dieses methodisch recht einfach zu erklären ist, auch wenn es zeitlich das letzte entwickelte Modell ist. Dem schließt sich die Erläuterung des Black76 Modells an, von dem zusätzlich gezeigt werden kann, dass dessen Formel nach kleineren Umformungen mit der des Black & Scholes Modells identisch ist. Methodisch ist Black76 jedoch wieder etwas einfacher zu beschreiben als das eigentlich viel bekanntere Black & Scholes Modell, weshalb dieses aufgrund der mathematischen Verwandtheit zu Black76 nicht mehr separat erläutert wird.

Die Modelle werden also in der umgekehrten Chronologie ihrer Veröffentlichung erläutert und das bekannteste Modell, das Black & Scholes Modell, überhaupt nicht erläutert. Dieser Ansatz sich ist sicher in dieser Kombination so einmalig wie er auf den ersten Blick seltsam erscheinen mag, jedoch denke ich, dass dieser Weg am anschaulichsten ist, bzw. für mich es war. Am Ende erfolgt noch ein kurzes Resümee über die Modelle und einige Erläuterungen weshalb Optionspreise an den Märkten oft vom rechnerischen Preis der Modelle abweichen.

---

[6] Einen guten Überblick gibt hier die Seite http://www.deifin.de/optionen.htm in der Version vom 08.03.2007

[7] Fama, Eugene F. (1970) *Efficient Capital Markets,* S. 385 ff

[8] Beschrieben durch die Formel $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot EXP\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)^2\right)$ E(X) = μ und S(X) = σ.

Abkürzungsverzeichnis

Allgemeine Variablen:

E, V, S,VarK	Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung und Variationskoeffizient einer Verteilung
$K_{[t]}$	Kurs [zum Zeitpunkt t]
e	Eulersche Zahl ≈ 2,718
i, z	Zinssatz (interest rate)
n	Allgemeine Zählvariable
t	Zeit (tempus) in Jahren (½ Jahr entspricht t = 0,5)
μ	Mittelwert der stetigen Verzinsung einer Datenreihe
σ	Standardabweichung bzw. Volatilität der stetigen Verzinsung einer Datenreihe
ε	Lageparameter der Lognormalverteilung
β	Schwankungsparameter der Lognormalverteilung

Spezielle Variablen für die Optionspreismodelle:

C_{t0}	Preis einer Call-Option (eventuell mit dem Zeitpunkt t indexiert)
K	Aktueller Kurs des Basiswertes
F	Forwardkurs des Basiswertes
X	Strike- / Ausübungspreis der Option auf den Basiswert
z	Risikoloser Zinssatz für ein Jahr
r	Kontinuierlicher Zuwachs über einen Zeitraum $r = exp(z \cdot t) - 1$
t	Laufzeit der Option in Jahren
σ	Volatilität des Basiswertes
N(d1), Φ(d1)	Das „d1“ Quantil der Normalverteilung. z.B. N(0) = 0,5.
uc; dc	upside-change; downside change im Binomialmodell
p	Wahrscheinlichkeit für den Eintritt von *uc* und *(1-p)* für den *dc* Zur besseren Übersicht auch indiziert als p_{uc} *und* $(1-p)_{dc}$

Sonstiges:

EXP(z)	gleichbedeutend mit e^z

Inhalt

1. Allgemeine Vorbemerkung zu Optionspreismodellen

Die Bewertung von Optionen erscheint auf den ersten Blick komplex, wenn nicht sogar rechnerisch unmöglich, ist aber eigentlich ganz einfach. Vorab sei an dieser Stelle aber bemerkt, dass aber alle Ansätze nur eine modellhafte Bestimmung des Optionspreises leisten können. Am Markt tatsächlich gehandelte Preise für Optionen können zum Teil erheblich von den mit den Modellen errechneten Preisen abweichen. Erklärt wird dies noch an späterer Stelle.

Alle drei Modelle nutzen letztlich, neben einigen zwangsläufig notwendigen Parametern, die Volatilität des Basiswertes als zentrale Größe, um eine Antwort auf die Bewertungsfrage zu finden. Dies ergibt sich daraus, dass der Kurs des Basiswerts sich, wenn auch nur modellhaft, „irgendwie" entwickeln muss. Würde man dies außer Acht lassen, könnte eine Option auf einen Basiswert von aktuell 10 € mit einem Strike von 12 € direkt als wertlos identifiziert werden, da man annimmt, dass sich der Kurs des Basiswertes sich im Zeitverlauf nicht verändert. Dem entgegen steht jedoch die Börsen-Vergangenheit, die durchaus zeigt, dass Aktien von 10 € auf 12 € oder mehr steigen können. Diese beispielhafte Option wird also kaum jemand verschenken, also muss ein sinnvolles Modell auch einen Preis dafür liefern können.

Letztlich kann aber diese in der Zukunft unterstellte Entwicklung nur eine Projektion der Vergangenheit sein. Hinsichtlich der modellhaften Kurs-Wahrscheinlichkeiten lässt sich der Sachverhalt wie folgt beschreiben. Bei einem Zufallsexperiment mit einem sechsseitigen Würfel ist bereits im Vorfeld die Wahrscheinlichkeit für jedes Ereignis bekannt. Dem Gesetz der großen Zahlen folgend werden auch die zukünftigen Ereignisse nach unendlich vielen Versuchen entsprechend dieser Wahrscheinlichkeiten verteilt sein. Eine Aktienkurs Veränderung ist jedoch nicht, wie ein Würfelexperiment, unendlich oft wiederholbar. Jeder Börsentag ist anders und sein Verlauf zudem von quasi unendlich vielen Faktoren abhängig. Daher ist es streng genommen nicht einmal, wie beim Würfelexperiment, vorab klar mit welchen Wahrscheinlichkeiten die Kursänderungen eintreten. Sie stammen lediglich aus den Entwicklungen der Vergangenheit, und es besteht keine Zwangsläufigkeit, dass dies in Zukunft weiter Bestand hat. Jedoch dürfte es unbestritten sein, dass diese Informationen aus der Vergangenheit die einzigen sind, die gesichert vorliegen.

1.1 Die stetige Verzinsung

Da Optionen ihre Fälligkeit in der Zukunft haben, dürfte auch ohne vorherige Kenntnis des einzelnen Bewertungsmodells klar sein, dass Auf- bzw. Abzinsen an irgendeiner Stelle bei allen Modellen notwendig werden wird.

Hierfür ist die diskrete Verzinsung, wie sie in der Praxis üblich ist, denkbar unhandlich, da immer die Kapitalisierungszeitpunkte zu berücksichtigen wären. Auch ist die diskrete Verzinsung nicht zu allen Zeitpunkten definiert. Lösen lassen sich beide Probleme indem man unendlich oft kapitalisiert. Hierdurch existieren keine zeitlichen Definitionslücken mehr und auf die Kapitalisierungszeitpunkte muss ebenfalls nicht mehr geachtet werden, da jeder mögliche Zeitpunkt gleichzeitig Kapitalisierungszeitpunkt ist.

Für unendliche Kapitalisierungen gilt – ohne genauer auf die Eulersche Zahl e ≈ 2,718 einzugehen:

$$\lim_{n \to \infty} = \left(1 + \frac{i_{nominal}}{n}\right)^{n} = e^{i_{nominal}}$$

stetige und diskrete Verzinsung

Verzinsungsarten mit endlichen Kapitalisierungen bezeichnet man als <u>diskrete Verzinsung</u>, da die Funktion zwischen den Zeitpunkten auch nicht definiert ist. Den Grenzfall mit unendlichen Kapitalisierungen nennt man daher <u>kontinuierliche oder auch stetige Verzinsung</u>, da für jeden beliebigen Zeitpunkt die Kapitalentwicklung (Effektivzins) definiert ist. Die Beschränkung des Wertebereichs auf n bzw. 1 soll nur ausdrücken, dass es sich um den Bereich innerhalb einer Periode handelt und ist im allgemeinen Fall nicht notwendig.

diskrete Verzinsung: $i_{effektiv}(t) = \left(1 + \frac{i_{nominal}}{n}\right)^{t} \qquad t \leq n \qquad t \in N$

stetige Verzinsung: $i_{effektiv}(t) = e^{(i_{nominal} \cdot t)} \qquad t \leq 1 \qquad t \in R$

1.2 Messung der historischen Volatilität am Beispiel von Aktien

Wer den Aktienmarkt etwas beobachtet, hat sicher schon festgestellt, dass mache Aktien sich im Kurs kaum verändern während andere extrem schwanken. Eine extreme Schwankung für den einen ist für den anderen vielleicht erst eine geringfügige Bewegung. Was liegt also näher diese Schwankung einfach mit einem einheitlichen Verfahren zu messen und in eine konkrete Zahl zu verdichten.

Dieses Problem löst die Volatilität, die die Standardabweichung Kursänderungen in der Vergangenheit, darstellt. Es gibt viele verschiedene Methoden zur Berechnung einer historischen Volatilität, je nach Methode ergeben sich andere Ergebnisse, die dann entsprechend auch anders interpretiert werden müssen. Beispielsweise lassen sich sowohl Schlusskurse als auch Tageshöchst- oder Tagestiefkurse zur Berechnung heranziehen. Es lassen sich Volatilitäten für beliebige Laufzeiten ermitteln, etwa ein Jahr, ein Monat oder eine Woche. Des Weiteren gibt es sehr unterschiedliche Verfahren, wie die verwendeten Kurse dann in die Berechnung der Volatilität eingehen. Es soll ein Verfahren vorgestellt werden, welches auf den historischen Schlusskursen basiert und das Ergebnis für die historische Jahresvolatilität so liefert, wie sie in den meisten Fällen in Kurstabellen in Börsenzeitschriften oder auf Internetseiten angegeben wird. Ein höherer Wert bei der Volatilität bedeutet also, dass die Aktie in der Vergangenheit eine stärkere Schwankung aufwies als eine mit einer geringeren Volatilität.

Mit dem Wissen was eine Standardabweichung ist, mag man geneigt sein bereits ungefähr zu wissen wie eine Volatilität ermittelt wird. Jedoch halte ich es für unverzichtbar für das Verständnis der späteren Optionspreismodelle zunächst detailliert in die Volatilitätsermittlung einzusteigen. Da bei der Ermittlung der Jahresvolatilität in der Regel 256 Kurs bzw. 255 Kursänderungen zugrunde liegen, wird aufgrund der besseren Übersichtlichkeit im folgenden Beispiel nur mit 5 Kursen bzw. 4 Kursänderungen gearbeitet.

1.2.1 Bestimmung des geometrischen Mittelwerts

Dass bei den Veränderungen von Aktienkursen nicht mit absoluten Kursänderungen gearbeitet werden darf, dürfte einleuchtend sein. Somit wären einfach nur aus den relativen Kursänderungen arithmetischer Mittelwert und Standardabweichung um diesen zu bilden[9].

Für die Bildung des Mittelwertes der prozentualen Kursänderungen ist das arithmetische Mittel aufgrund seiner additiven Verknüpfung der Werte jedoch nicht geeignet. So ergibt ein Kursanstieg von 100 % und ein Kursrückgang um -50 % wieder den Ausgangskurs (mittlere Kursänderung μ = 0 %). Das arithmetische Mittel liefert hier jedoch μ = 25 % und ist somit ungeeignet. Damit würde der Mittelwert auf einen nicht vorhandenen Aufwärtstrend hindeuten. Korrekt wäre der geometrische Mittelwert, der μ = 0 % liefert.

Tabelle1 zeigt anhand der an dieser Stelle eingeführten Beispiel-Datenreihe (1) & (2) den Unterschied von arithmetischem (4) und geometrischem (5) Mittelwert. Auch wenn der Unterschied zunächst gering erscheint, zeigt sich dieser bei seiner weiteren Verwendung deutlich.

Zeitpunkt	Kurs	relative Änderung	arith. Mittel	geom. Mittel	stetige Verzinsung	Ø stetige Verzinsung	geom. Mittel
(1) = [t]	(2) = K[t]	(3) = (2[t]) / (2[t-1])	(4) = Σ(3) / 4	(5) = Π(3)^(1/4)	(6) = ln(K[t] / K[t-1])	(7) = Σ(6) / 4	(8) = e^(7)
1	5,00 €						
2	6,25 €	125,00000%			22,31436%		
3	5,00 €	80,00000%			-22,31436%		
4	4,00 €	80,00000%			-22,31436%		
5	2,50 €	62,50000%			-47,00036%		
			86,87500%	84,08964%		-17,32868%	84,08964%

(Tabelle 1)

Da der Mittelwert die durchschnittliche relative Änderung pro Periode angibt und sich der Kurs über die Gesamtperiode von 5,00 auf 2,50 € halbiert hat, muss also eine viermalige Anwendung des korrekten Mittelwerts den Faktor 0,5 zum Ergebnis haben.

[9] Dies wäre eine Vorgehensweise analog dem BVI Rundschreiben MR 98/96, wie sie dort für Fonds verwendet wurde. Dort ist die Zielsetzung jedoch nur eine Risikomessung, was mit diesem vereinfachten Verfahren durchaus erfüllt ist.

Für den geometrischen Mittelwert ist dies erfüllt mit:

$$0{,}8408964 \cdot 0{,}8408964 \cdot 0{,}8408964 \cdot 0{,}8408964 = 0{,}5$$

Das arithmetische Mittel zeigt sich hier mit einem Ergebnis von knapp 0,57 nun endgültig als ungeeignet.[10]

Durch die multiplikative Verknüpfung der Kursänderungen gestaltet sich die Handhabung, auch im Hinblick auf die spätere Ermittlung der Standardabweichung, aber als unhandlich. Hier kommt das Logarithmieren der Quotienten (3) zu (6) ins Spiel. Die so ermittelten Werte kann man als eine Art von stetiger Verzinsung[11] (6) gemäß den Erläuterungen unter 1.1 innerhalb einer Periode auffassen. Um hieraus das geometrische Mittel zu erhalten, muss die Eulersche Zahl *e* noch mit dem Ergebnis von (7) zu (8) potenziert werden, um das vorherige Logarithmieren wieder zu kompensieren.

Allgemein gilt für die 255 Kurse:

$$\mu = \frac{1}{255} \cdot \sum_{t=2}^{256} \ln\left(\frac{K_{[t]}}{K_{[t-1]}}\right) \quad \text{Erwartungswert der stetigen Verzinsung}$$

Die Eulersche Zahle nun wieder mit dem Wert von μ wieder potenziert, ergibt das gesuchte geometrische Mittel.

$$\sqrt[255]{\prod_{t=2}^{256} \frac{K_{[t]}}{K_{[t-1]}}} = e^{\mu} \qquad \text{Erwartungswert des multiplikativen Zuwachses}$$

[10] Münstermann, Jörg (2000) *Der Anlageerfolg von Spezialfonds,* S. 56-57 oder auch Zimmermann, Heinz (1992) *Performance Messung im Asset Management*
[11] Fama, Eugene F. (1965) *The Behaviour of Stock-Market Prices,* S. 45

1.2.2 Bestimmung von Standardabweichung / Volatilität

Bei der Bestimmung der Standardabweichung zeigt sich erst der eigentliche Vorteil der logarithmieren Wert von (6), da nun die jeweiligen quadrierten Abweichungen zum Mittelwert (7), die zu den Bestandteilen des zweite faktoriellen Moments (9) führen, weiterhin additiv verknüpft werden können.

Zeitpunkt (1) = [t]	**Kurs** (2) = K[t]	**stetige Verzinsung** (6) = ln(K[t] / K[t-1])	**Ø stetige Verzinsung** (7) = Σ(6) / 4	**2. Moment** (9) = ((6) - (7))^2	**Varianz** (10) = Σ(9) / 4	**Standardabweichung** (11) = (10)^0,5
1	5,00 €					
2	6,25 €	22,31436%		15,71570%		
3	5,00 €	-22,31436%		0,24857%		
4	4,00 €	-22,31436%		0,24857%		
5	2,50 €	-47,00036%		8,80409%		
			-17,32868%		6,25423%	25,00846%

(Tabelle 2)

Unter (10) erhält man nun das zweite faktorielle Moment bzw. die Varianz der stetigen Verzinsungen (7). Die Wurzel daraus entspricht dann der Standardabweichung (8) bzw. dem Wert den es zu ermitteln galt – der Volatilität. Der errechnete Wert für die Volatilität aus dem Beispiel wird für die anschließenden Berechnungen, zu besseren Übersicht, auf 25,000 % abgerundet.

Allgemein gilt für die 255 Kursdifferenzen: $\sigma = \sqrt{\frac{1}{255-1} \cdot \sum_{t=2}^{256} \left(\ln\left(\frac{K_{[t]}}{K_{[t-1]}} \right) - \mu \right)^2}$

Exkurs zur Standardabweichung:

Für die Berechnung der Standardabweichung von *N* Elementen existieren zwei Varianten. Einmal werden die quadrierten Differenzen mit *1/N* und einmal mit *1/(N-1)* multipliziert. Hierbei spricht man in der Statistik von einer Beschreibung und einer Schätzung. Die Variante *1/N* wird verwendet wenn die Standardabweichung aus allen Elementen der Grundgesamtheit berechnet wurde, also diese beschreibt. *1/(N-1)* verwendet man, wenn man aus einer Stichprobe eine Schätzung für die Grundgesamtheit abgeben will. Da die beobachteten 255 Aktienkursdifferenzen immer nur eine Stichprobe darstellen können, ist beim Berechnen der Volatilitäten(schätzung) immer die *1/(N-1)* Variante anzuwenden. Geht $n \rightarrow \infty$, geht der Unterschied der beiden Varianten zudem gegen 0.

Bei der Berechnung der Standardabweichung in Tabelle 2 wurde aufgrund der geringen Anzahl der Werte auf die Verminderung um 1 verzichtet.

1.2.3 Interpretation von Standardabweichung / Volatilität

Es mag aufgefallen sein, dass nach Abschluss der Berechnung von 1.2.2 nicht wieder die Eulersche Zahl *e* mit dem Ergebnis potenziert wurde, um das vorherige Logarithmieren zu kompensieren. Und genau dies ist der Grund weshalb Eingangs erwähnt wurde, dass die genaue Volatilitätsberechnung für das Modellverständnis unabdingbar ist. Denn eine Volatilität von 25 % bedeutet eben nicht, wie häufig angenommen, dass die erwartete Schwankung[12] zwischen 125 % und 80 % liegt.

Die 25 % sind, wie aus der Berechnung klar wird, die erwartete Schwankung der <u>stetigen Verzinsung</u>, was bereits einen gewissen Unterschied[13] darstellt. Will man nun die erwartete Kursschwankung bestimmen, ist eben dieses vermeidlich vergessene Potenzieren der Eulerschen Zahl *e* mit dem Ergebnis nötig. Die erwartete Schwankung des Aktienkurses beträgt also:

Nach oben: $128{,}40\% = e^{0,25}$ und nach unten $77{,}88\% = e^{-0,25}$

Zeitpunkt (1) = [t]	**Kurs** (2) = K[t]	**stetige Verzinsung** (6) = ln(K[t] / K[t-1])	**Ø stetige Verzinsung** (7) = Σ(6) / 4	**2. Moment** (9) = ((6) - (7))^2	**Gewichtung** (9a)	**Varianz** (10) = Σ((9) * (9a))	**Standardabweichung** (11) = (10)^0,5
t	100,00 €						
t+1	128,40 €	25,00000%		6,25000%	43,78235%		
t	100,00 €						
t+1	77,88 €	-25,00000%		6,25000%	56,21765%		
			0,00000%			6,25000%	25,00000%

(Tabelle 3)

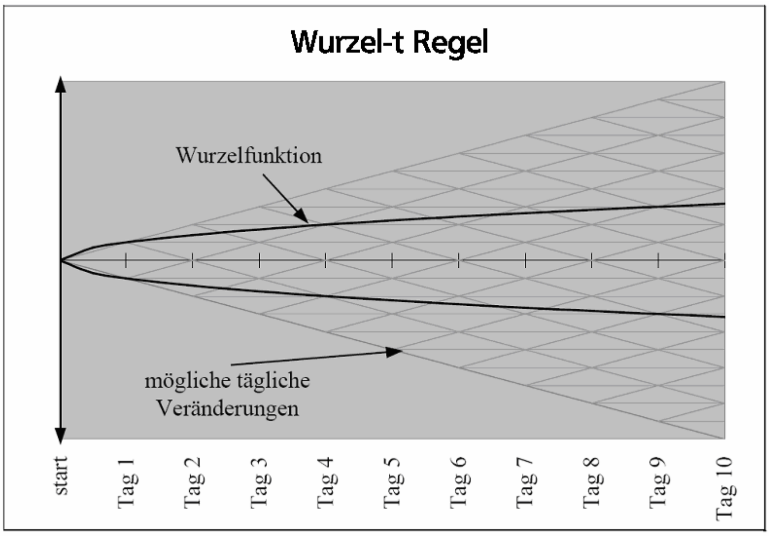
Eine Art Proberechnung lässt sich wie in Tabelle 3 auch durchführen, wenn man aus den beiden Werten zwei fiktive Kursänderungspaare bildet und hiervor wieder eine Volatilität von 25 % errechnen kann. Hätte man 125 % und 80 % verwendet, käme man auf ein anderes Ergebnis, was beweist das diese Vorgehensweise falsch wäre.

Die Ermittlung der Gewichtung unter (9a) wird bei der Erläuterung des Cox-Ross-Rubinstein Modells unter 2.2 genauer dargestellt.

[12] Volatilität bzw. die einfache Standardabweichung ist nichts Anderes als der Erwartungswert der Abweichungen um den Mittelwert.
[13] Dieser Unterschied ist für einen Vergleich der Volatilitäten zweier Aktien eigentlich unerheblich, da die fehlerhafte Interpretation für beide Aktienvolatilitäten gilt und sich so quasi herauskürzt. Bei der Kursmodellierung in den Optionspreismodellen führt dies jedoch zu anderen Ergebnissen.

1.2.4 Zeitliche Skalierung der Volatilität

Geht man nun davon aus den 255 stetigen Renditen die Tagsvolatilität ermittelt zu haben, fehlt noch immer die Aussage über die Jahresvolatilität. Geht man davon aus, dass die Volatilität über die Zeit konstant bleibt, kann man die Volatilitäten von verschiedenen Haltedauern mittels eines als *Quadratwurzel-t Regel*[14] bekannten Zusammenhangs untereinander umrechen. Die Normalverteilungsannahme ist hierfür nicht zwingend Voraussetzung, jedoch ist zu beachten, dass beispielsweise bei schiefen, also unsymmetrischen, Verteilungen sich durch die Veränderung der Haltedauer auch der Erwartungswert ändert[15].



Hierbei gilt:

$$\sigma_{neue\quad Haltedauer} = \sigma_{Ausganshaltedauer} \cdot \sqrt{\frac{neue \quad Haltedauer \quad in \quad Handelstagen}{Ausgangshaltedauer \quad in \quad Handelstagen}}$$

Somit erhält man aus der Datenreihe der Tagesvolatilitäten die Jahresvolatilität durch:

$$\sigma_{255} = \sigma_1 \cdot \sqrt{\frac{255}{1}}$$

[14] Danielsson, Jon and Zigrand, Jean-Pierre (2005) *On Time-scaling of Risk and the Square-root-of-time Rule*

[15] Bei der Verdoppelung der „Haltedauer“ beispielsweise einer Poissonverteilung, was einer Faltung gleichkommt, verdoppelt sich deren Varianz. Damit steigt, wie im oberen Beispiel, die Standardabweichung in der Quadratwurzel davon an. Jedoch hat sich auch der Erwartungswert verdoppelt.

2. Das Cox-Ross-Rubinstein Modell zur Optionspreisbestimmung

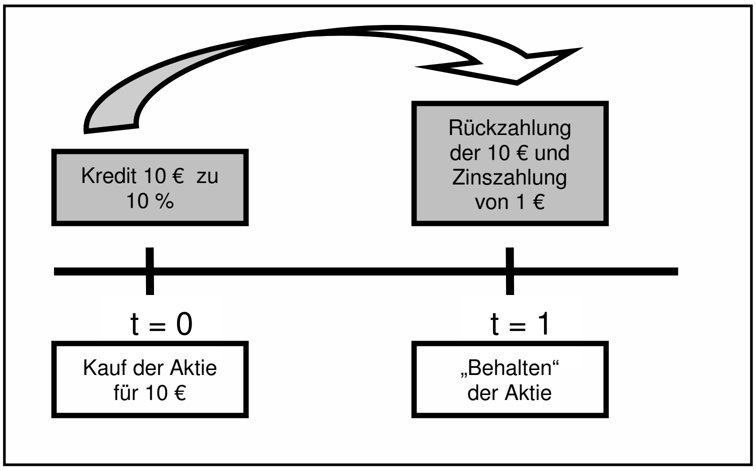
Beim Cox-Ross-Rubinstein Modell handelt es sich um ein Binomialmodell. Auch wenn es zeitlich die letzte Entwicklung ist, lässt sich hiermit die Bewertung einer Option recht anschaulich darstellen. Die folgende Darstellung entspricht in einigen Punkten nicht der des Originalmodells von 1979, erschien mir persönlich jedoch etwas anschaulicher und führt letztlich zu den gleichen Ergebnissen bzw. Optionspreisen.

Es gelten die folgenden Marktdaten:

$A = 10$ €	Kassakurs des Basiswerts heute t_0
$X = 10$ €	Strike- / Ausübungspreis der Option auf den Basiswert
$t = 1$	Laufzeit der Option in Jahren
$z = 10$ %	Risikoloser Zinssatz für die Laufzeit t
$\sigma = 25$ %	Jahresvolatilität des Basiswertes

2.1 Der erwartete Preis einer Aktie in der Zukunft

Vor der Optionspreisbestimmung gilt es zunächst den eigentlichen Preis für die Aktie in der Zukunft zu bestimmen. Dieser ist aus aktueller Sicht nicht auf einen Horizont von beispielsweise einem Jahr mit Sicherheit prognostizierbar. Jedoch ist es möglich, statt den Aktienkauf in einem Jahr vorzunehmen, heute einen Kredit aufzunehmen und damit die Aktie sofort zu kaufen. Dieser Kredit ist dann in einem Jahr nebst Zinsen zu tilgen und man behält einfach die Aktie, die man in einem Jahr ohnehin erwerben wollte. Wie sich in dieser Zeit die Aktie dann tatsächlich entwickelt ist bei dieser Vorgehensweise nicht relevant.



* Ermittlung eines Forwardkurses

Es ist daher die Aussage zulässig, dass die Aktie, die heute 10 € kostet, bei einem Kauf „auf Termin“ in einem Jahr 11 € kostet. Wichtig ist hierbei jedoch, im Gegensatz zur Option, dass man die Aktie auf jeden Fall für die 11 € abnehmen muss[16]. Hiermit kann man zwar noch keine Option bewerten, jedoch ist die Ermittlung des Terminkurses bereits ein wesentlicher Schritt dorthin.

Um bereits bei der Ermittlung des Terminkurses nicht in zu große Komplexität zu verfallen, wird hier die stetige Verzinsung aus 1.1 eingesetzt. Diese hat den Vorteil, dass es nicht nötig ist sich noch um die Kapitalisierungszeitpunkte Gedanken machen zu müssen. Damit gilt:

$$F = K \cdot e^{z \cdot t} \qquad 11{,}05\text{ €} = 10\text{ €} \cdot e^{0{,}10 \cdot 1}$$

Auffällig ist, dass man hierbei nicht mehr exakt ein Ergebnis von 11,00 € erhält, was seine Ursache in den nun unendlichen Kapitalisierungszeitpunkten hat. Durch Logarithmieren des Zinssatzes lässt sich auch dies vermeiden. Ist nur der Zinssatz *z* für jährliche Kapitalisierungen vorhanden, rechnet man:

$$F = K \cdot e^{\ln(1+z) \cdot t} \qquad 11\text{ €} = 10\text{ €} \cdot e^{\ln(1{,}10) \cdot 1}$$

Da dies jedoch an der eigentlichen Ermittlung des Terminkurses nichts ändert und nur die spätere Optionspreisformel unnötig vergrößern würde, wird weiterhin einfach

16 Dies nennt man auch deterministisches Termingeschäft.

davon ausgegangen, dass mit *z* schon ein entsprechend bereinigter Zins vorliegt, der in die Formel für die stetige Verzinsung direkt eingesetzt werden kann.

2.2 Ermittlung risikoneutraler Wahrscheinlichkeiten

Nachdem nun der Erwartungswert für den Basiswert bei Fälligkeit der Option bekannt ist, wird nun mittels der historischen Volatilität[17] die Unsicherheitskomponente hinzugefügt, was bereits eine der wesentlichen Modellannahmen ist, die in der Realität so nicht zwangsläufig zutreffen muss, weshalb die gehandelten Optionspreise von den theoretischen Preisen durchaus abweichen können.

Wie in 1.2.3 erläutert sagt eine Jahresvolatilität von 25 % aus, dass der Aktienkurs prozentual eine erwartete Schwankung zwischen $e^{0,25}$ und $e^{-0,25}$ aufweist. Diese wäre noch mit dem Aktienkurs zu multiplizieren - also:

$12{,}84€ = e^{0,25} \cdot 10\ €$ für den ansteigenden Fall.

und

$7{,}79€ = e^{-0,25} \cdot 10\ €$ für den abfallenden Fall.

Aufgrund der Volatilität ist somit zu erwarten, dass die Aktie nach einem Jahr bei 12,84 € oder 7,79 € stehen wird. Nun ist die Wahrscheinlichkeit hierfür nicht 50 / 50, sondern so zu wählen, dass der Erwartungswert der Terminkurs aus 2.1 ist. Würde man diese Bedingung nicht beachten, könnte man am Markt theoretisch risikolos Geld gewinnen bzw. chancenlos Geld verlieren.

An dieser Stelle werden für das prozentuale „Wieviel" die Begriffe upside- (*uc*) und downside-change (*dc*) eingeführt. Damit gilt:

$uc = 28{,}40\% = e^{0,25} - 1$ für den upside-change

und

$dc = -22{,}12\% = e^{-0,25} - 1$ für den downside-change

[17] Es wird unterstellt, dass die historisch gemessene (Jahres)volatilität auch in der Zukunft Bestand haben wird.

und

$r = 10{,}50\% = e^{0{,}1\cdot 1} - 1$ für den Zuwachs von aktuellem Kurs zum Forwardkurs.

Damit für die Eintrittswahrscheinlichkeiten von *uc* und *dc* gelten, wenn ein erwarteter Zuwachs von *r* stattfinden soll.

$$uc \cdot p_{uc} + dc \cdot (1 - p_{uc}) = r \qquad uc \cdot p_{uc} + dc - dc \cdot p_{uc} = r \qquad dc = r - uc \cdot p + dc \cdot p$$

$$uc \cdot p_{uc} - dc \cdot p_{uc} = r - dc \qquad p_{uc} \cdot (uc - dc) = r - dc$$

$$p_{uc} = \frac{r - dc}{uc - dc} \text{ bzw. im Beispiel } \quad 64{,}60\% = \frac{10{,}50\% - (-22{,}12\%)}{28{,}40\% - (-22{,}12\%)}$$

Berechnet man nun aus $12{,}84€ = e^{0{,}25\cdot 1} \cdot 10\ €$ für den ansteigenden Fall mit einer Wahrscheinlichkeit von 64,60 % und $7{,}79€ = e^{0{,}25\cdot 1} \cdot 10\ €$ für den abfallenden Fall mit einer Wahrscheinlichkeit von 35,40 % den Erwartungswert, erhält man wieder den Forwardkurs von 11,05 €. Die Volatilität von 25 % ist dabei ebenfalls erhalten[18] geblieben. Man spricht hier auch von einem „Drift“ in Höhe von *r*.

Eine andere Möglichkeit ist zuerst den Kassakurs zum Forwardkurs aufzuzinsen und diesen dann ohne einen Drift *(r=0)* mit *uc* und *dc* auf Basis der Volatilität schwanken zu lassen. Hierbei ergibt sich dann, neben den gegenüber der ersten Variante aufgezinsten *uc* und *dc´s*, ein anderer Wert für p_{uc}. Die Resultate nähern sich bei zunehmender Periodenanzahl in beiden Varianten einander an, was auch mathematisch beweisbar ist, aber worauf an dieser Stelle verzichtet wird. Im Vorgriff auf Punkt 4.1. ähnelt die Variante mit Drift dem Black & Scholes Modell und die mit vorherigem Aufzinsen dem Black76 Modell. Ist ein Aufzinsen aufgrund von unsystematischen Preisfaktoren z.B. bei Rohstoffen nicht möglich, sondern nur der Forwardkurs bekannt, kann die Variante mit Drift sogar überhaupt nicht verwendet werden.

Das Cox-Ross-Rubinstein Modell in seiner ursprünglichen Version wie sie 1979 im Journal of Financial Economics veröffentlicht wurde, verwendet die Variante mit Drift in Höhe von *r*, die in den weiteren Beispielen hier ebenfalls zur Anwendung kommt.

[18] Dies wurde beispielhaft bei 1.2.3 gezeigt, wenn hier auch ohne Drift und daher mit anderen Eintrittswahrscheinlichkeiten

2.3. Das einperiodige Binomialmodell

Die Ermittlung der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten hat eigentlich bereits in Grundzügen die Idee hinter dem einperiodigen Binomialmodell dargestellt, da bereits alle drei bzw. vier Parameter für die Kursmodellierung des Basiswertes feststehen.

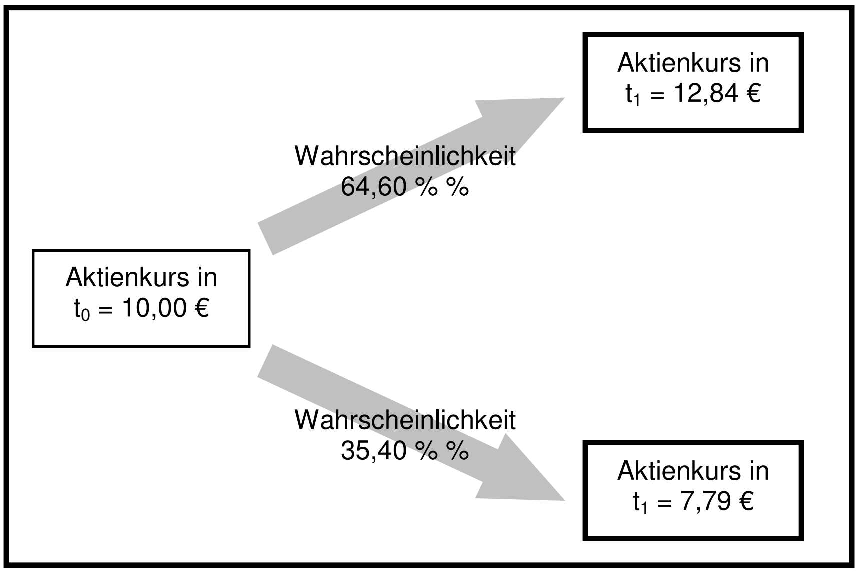
$uc = 28{,}40\% = e^{0{,}25} - 1$ für den upside-change

$dc = -22{,}12\% = e^{-0{,}25} - 1$ für den downside-change

$p_{uc} = 64{,}60\% = \dfrac{10{,}50\% - (-22{,}12\%)}{28{,}40\% - (-22{,}12\%)}$ Wahrscheinlichkeit für einen upside-change.

nachrichtlich $p_{dc} = 35{,}40\% = 1 - p_{uc}$

Mittels dem einperiodigen Binomialmodell wir der Aktienkurs in *t_1* somit als Zweipunkt-Verteilung modelliert.



* einperiodiges Binomialmodell

Wäre nun der Preis einer Option mit einem Strike von beispielsweise 12,00 € zu bestimmen, kann dieser einfach an der Zweipunktverteilung in *t_1* „angelegt“ werden. Diese erreicht mit einer Wahrscheinlichkeit von 64,60 % einen Wert von 12,84 € - damit hätte eine Call-Option in *t_1* folgenden Wert:

$$C_{t1} = 0{,}55€ = 64{,}60\% \cdot (12{,}84€ - 12{,}00€)$$

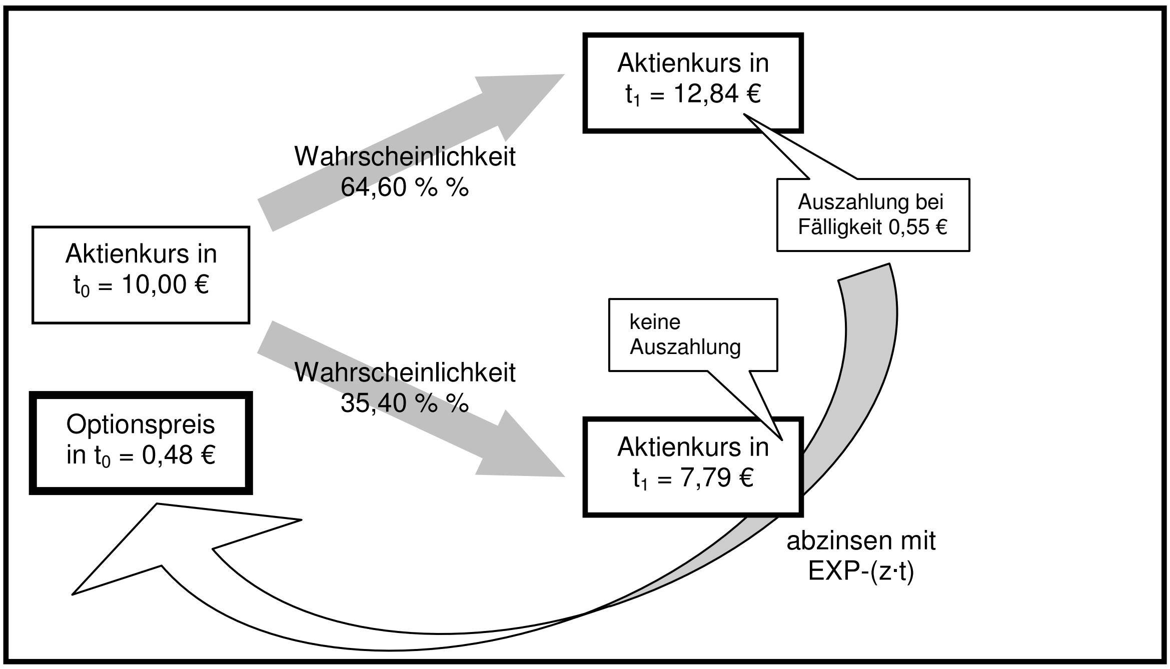
Das „Anlegen“ an den 7,79 € erübrigt sich in diesem Fall, da diese unter dem Strike liegen und daher die Option in t_1 wertlos ist.

Da dies den Wert der Call-Option aber zum Zeitpunkt der Fälligkeit darstellt, muss der Wert C_{t1} noch auf t_0 abgezinst werden, um den aktuellen Optionspreis C_{t0} zu erhalten. Dies erfolgt wieder mittels der Umkehrung der einfach handhabbaren stetigen Verzinsung.

$$0{,}48€ = e^{-(0{,}1\cdot 1)} \cdot 0{,}55€ = C_{t0} = e^{-(z\cdot t)} \cdot C_{t1}$$

K	Aktueller Kurs des Basiswertes	10,00 €
F	Forwardkurs des Basiswertes	11,05 €
X	Strike- / Ausübungspreis	12,00 €
z	Risikoloser Zinssatz für ein Jahr	10,00 %
t	Laufzeit der Option in Jahren	1,0 Jahre
σ	Jahresvolatilität des Basiswertes	25,00 %

Damit hätte eine Call-Option, mit den oben noch einmal zusammenfassend dargestellten Ausstattungsmerkmalen und Marktdaten, heute im einperiodigen Binomialmodell einen Wert von 0,48 €. Schematisch stellt sich dies wie folgt dar:



* Optionspreisbestimmung im einperiodigen Binomialmodell

Das einperiodige Binomialmodell lässt jedoch viele Fragen offen bzw. beantwortet diese unzureichend. Eine besonders auffällige Unzulänglichkeit ist im Beispiel die Bewertung von Call-Optionen mit einem Strike über 12,84 €. Im einperiodigen Binomialmodell wäre diese alle wertlos, da ein Anstieg des Aktienkurses über 12,84 € im Modell nicht vorgesehen ist. Zwei Gründe sprechen jedoch gegen diese Ergebnisse.

1. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Aktie von 10,00 € auf über 12,84 € steigt, ist mit Sicherheit größer Null, woraus folgt, dass niemand eine Call-Option mit einem Strike von 13,00 € „verschenken" würde.
2. Der bisher unbekannte Preis für einen Strike von 13,00 € ist mit Sicherheit höher als für 14,00 €, was ausschließt, dass beide Null und somit gleich sind.

Diesen Unzulänglichkeiten wird, wie nachfolgend beschrieben, mit dem mehrperiodigen Binomialmodell zu begegnen versucht.

2.4. Das mehrperiodige Binomialmodell

Im einperiodigen Binomialmodell wurde die Volatilität nur zu Modellierung einer einfachen Zweipunktverteilung genutzt, die eine entsprechende Standardabweichung zum Forwardkurs aufweist. Die bereits festgestellten Unzulänglichkeiten sind eigentlich nur auf die Zweipunktverteilung zurückzuführen, die für alle Kurse zwischen und um die beiden Punkte herum eine Wahrscheinlichkeit von Null ausweist.

Um zunächst auf ein zweiperiodiges Binomialmodell zu erweitern, macht man sich die Methode aus 1.2.4. zu Nutze. Die Jahresvolatilität wird zeitlich „halbiert". Dass bei 255 Handelstagen dadurch ein halber Handelstag entsteht ist letztlich vernachlässigbar.

Aus 1.2.4. gilt: $\sigma_{127,5} = \sigma_{255} \cdot \sqrt{\frac{127,5}{255}}$ $\quad 17,68\% = 25,00\% \cdot \sqrt{\frac{127,5}{255}}$

Gemäß dieser jedoch auch nur modelltheoretischen Annahme beträgt die Halbjahresvolatilität also 17,68 %, womit man zunächst wieder ein einperiodiges Binomialmodell aufbaut; nun aber mit *t = 0,5*. Dieser Umstand ist auch bei der Ermittlung der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten zu beachten. Die Berechnung der einzelnen Eckdaten wird kurz tabellarisch, wie in 2.2. und 2.3. ausführlich erläutert, dargestellt.

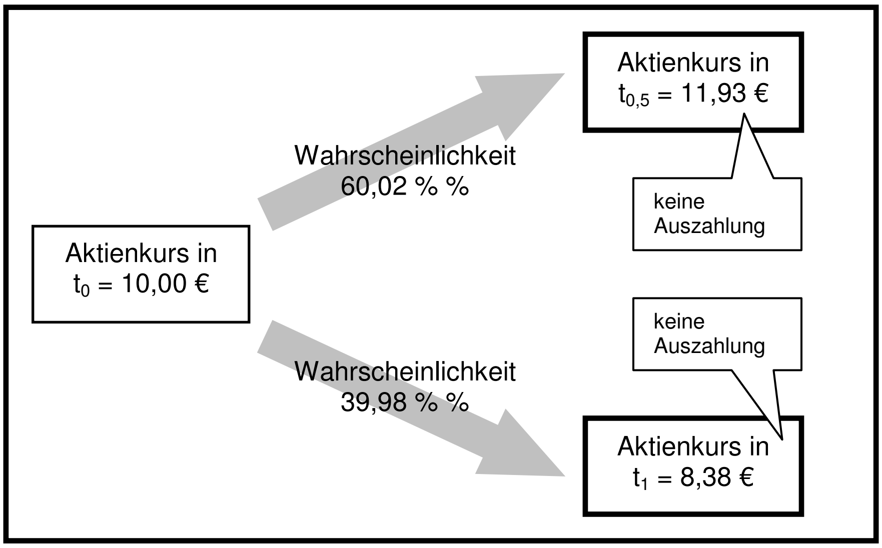
$uc = 19{,}34\% = e^{0{,}1768} - 1$ für den upside-change

$dc = -16{,}20\% = e^{-0{,}1768} - 1$ für den downside-change

$r = 5{,}12\% = e^{0{,}1 \cdot 0{,}5} - 1$ für den Zuwachs von aktuellem Kurs zum Forwardkurs.

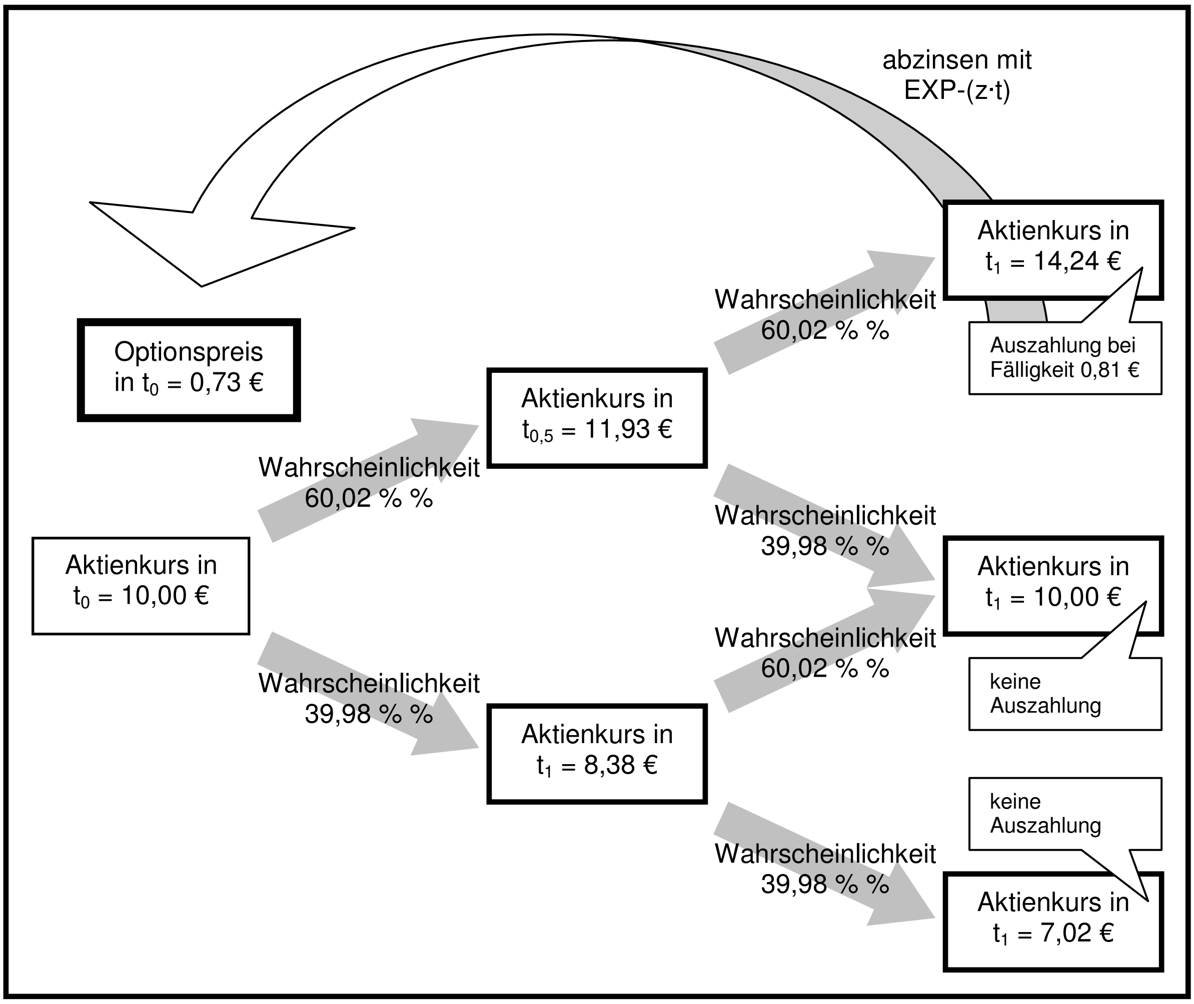
$p_{uc} = 60{,}02\% = \dfrac{5{,}12\% - (-16{,}20\%)}{19{,}34\% - (-16{,}20\%)}$ Wahrscheinlichkeit für einen upside-change.

nachrichtlich $p_{dc} = 39{,}98\% = 1 - p_{uc}$



* Erste Periode im zweiperiodigen Binomialmodell

Für eine Call-Option mit einer Laufzeit von einem halben Jahr wäre dies bereits das einperiodige Binomialmodell, welches aufgrund der reduzierten Volatilität diese Call-Option als wertlos identifizieren würde, was mit Sicherheit nicht korrekt ist. Da die Laufzeit jedoch ein Jahr ist, wird nun einfach an die beiden möglichen Aktienkurse aus dem einperiodigen Binomialmodell dieses noch einmal anhängt. Dadurch erhält man dann das zweiperiodige Binomialmodell.



* zweiperiodiges Binomialmodell

Das zweiperiodige Binomialmodell modelliert den Aktienkurs nun schon über eine deutlich größere Spannweite von 7,02 € bis 14,24 €. Dabei ergeben sich folgende Kurswahrscheinlichkeiten.

- 14,24 € werden mit einer Wahrscheinlichkeit von 36,02 % erreicht.
- 10,00 € werden mit einer Wahrscheinlichkeit von 47,99 % erreicht.
- 7,02 € werden mit einer Wahrscheinlichkeit von 15,99 % (aufgerundet) erreicht.

Damit ergibt sich für die Call-Option mit einem Strike von 12,00 € bei Fälligkeit ein Auszahlungsprofil von 2,24 €, welches zu 36,02 % erreicht wird. Diese 0,81 € abgezinst ergeben den aktuellen Optionspreis von 0,73 €.

Bei Beginn der zweiten Periode werden jedoch, ohne an dieser Stelle genauer darauf einzugehen, implizit zwei wesentliche Annahmen gemacht, die später auch als

Modellrestriktionen für das Black76 Modell gelten. Einmal wird davon ausgegangen, dass der risikolose Zins in einem halben Jahr noch der gleiche ist und auch von der Volatilität wird angenommen konstant zu sein. Im Binomialmodell hätte man aber an dieser Stelle zumindest die Möglichkeit noch vor Beginn der zweiten Periode „einzugreifen". Dies wird teilweise auch von aktuellen Bewertungsmodellen, die auf dem Binomialmodell basieren, genutzt.

Um nun zum mehrperiodigen Binomialmodell zu gelangen, ist es nur noch ein kleiner Schritt. So ist vor der Bestimmung von upside-change und downside-change die Volatilität auf eine (Teil-)Periode zu skalieren; ebenso der Zuwachs *r* pro Periode. Wie man bereits beim zweiperiodigen Binomialmodell erkennen konnte, steigt die Spannweite der abgedeckten Kursmöglichkeiten und deren Dichte mit zunehmender Periodenanzahl, sodass der rechnerische Optionspreis dann bei einer Erhöhung der Periodenzahl um Eins kaum noch ändert. Sobald diese Änderung dem Modellanwender akzeptabel erscheint, ist die Periodenanzahl ausreichend. So ergibt sich für eine Periodenanzahl von 25 ein Optionspreis von 0,66546 €

Wahrscheinlichkeit	Aktiekurs	Auzahlung	Σ Auszahlung	abgezinsteΣ Auszahlung
0,0000114004%	34,90 €	0,00 €	0,73545 €	0,66546 €
0,0002552258%	31,58 €	0,00 €		
0,0027426487%	28,58 €	0,00 €		
0,0188295993%	25,86 €	0,00 €		
0,0927402127%	23,40 €	0,01 €		
0,3488041941%	21,17 €	0,03 €		
1,0411774743%	19,16 €	0,07 €		
2,5307231897%	17,33 €	0,13 €		
5,0990759745%	15,68 €	0,19 €		
8,6250617866%	14,19 €	0,19 €		
12,3579523866%	12,84 €	0,10 €		
15,0907009061%	11,62 €			
15,7659636636%	10,51 €			
14,1183791710%	9,51 €			
10,8368327768%	8,61 €			
7,1165272720%	7,79 €			
3,9830197091%	7,05 €			
1,8882972626%	6,38 €			
0,7515401126%	5,77 €			
0,2479481799%	5,22 €			
0,0666110837%	4,72 €			
0,0142023931%	4,27 €			
0,0023124011%	3,87 €			
0,0002700977%	3,50 €			
0,0000201560%	3,17 €			
0,0000007220%	2,87 €			

* 25 periodiges Binomialmodell; Strike = 12,00 €; uc = 5,18 %; dc = -4,88; p_{uc} = 52,77 %

Auch eine Periodenanzahl von 500 ergibt mit 0,66375 € keinen wesentlich genaueren Wert mehr, und auch der Grenzwert für eine unendliche Periodenanzahl[19] hat, im Vorgriff auf das Black76 Modell, einen Optionswert von 0,66383 € zum Ergebnis.

3. Das Black76 Modell zur Optionspreisbestimmung

Das Black76 wählt auf den ersten Blick einen völlig anderen Ansatz. Aus den Kurs bzw. Forwardkurs und der Volatilität wird eine stetige Verteilung modelliert, eine Lognormalverteilung.

Das Black76 Modell verfolgt dabei dennoch eine Idee ähnlich dem Cox-Ross-Rubinstein Modell ohne Drift. Der aktuelle Kurs wird zunächst auf die Optionsfälligkeit aufgezinst, was als Forwardkurs auch gleichzeitig der Erwartungswert dieser Verteilung ist. Die Streuung um diesen Erwartungswert wird über die Volatilität zu einer Lognormalverteilung modelliert. Für die Verwendung dieser Verteilung sprechen vielerlei Gründe, jedoch bleibt diese Verteilung immer nur eine modellhafte Annahme. So treten in der Realität Extrema in den Randbereichen, so genannte fat-tails[20], die bei *Fama* long-tails genannt werden, wesentlich häufiger auf als von der Lognormalverteilung beschrieben. Für die Lognormalverteilung spricht aber insbesondere, dass diese im Negativen nicht definiert ist, was auch Kursen von Aktien, Rohstoffen etc. entspricht, die ausschließlich im positiven Preisbereich notieren.

[19] Cremers, Heinz (2000), *Konvergenz der binomialen Optionspreismodelle gegen das Modell von Black/Scholes/Merton*

[20] Martin Severin (2002), *Randbereiche von Verteilungen: Fat-Tails*

3.1. Mathematischer Hintergrund der Verteilungsmodellierung

Die Lognormalverteilung bzw. deren Dichtefunktion ist durch die folgende Formel beschrieben, die für einen gegebenen Wert x der Zufallsvariable X eine entsprechende Wahrscheinlichkeit angibt.

$$f(x) = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{x} \cdot EXP\left(-\frac{(\ln(x) - \varepsilon)^2}{2\beta^2} \right)$$

Abhängig ist diese Wahrscheinlichkeit noch von Erwartungswert (E) und der Standardabweichung (S), die der Verteilung zugrunde liegen. Diese sind jedoch nicht, wie bei der Normalverteilung, direkt die Funktionsparameter, sondern die nachfolgend hinsichtlich ihrer Berechnung dargestellten Parameter *ε* und *β*. Auf die oft gebräuchliche Verwendung von *σ* und *µ* wird hier aufgrund der Verwechslungsmöglichkeit verzichtet.

$$\beta = \sqrt{\ln\left(1 + \left(\frac{S}{E}\right)^2\right)} \qquad\qquad \varepsilon = \ln(E) - \frac{\beta^2}{2}$$

Durch Umformung können aus den Parametern auch wieder Erwartungswert (E) und Standardabweichung (S) errechnet werden.

$$S(X) = \sqrt{EXP(2\varepsilon + \beta^2) \cdot (EXP(\varepsilon^2) - 1)} \qquad\qquad E(X) = EXP\left(\varepsilon + \frac{\beta^2}{2}\right)$$

Dass als Erwartungswert (E) der Forwardkurs zu verwenden ist, dürfte klar sein, jedoch stellt die Volatilität *σ* nicht die hier benötigte Standardabweichung (S) dar, denn die hier benötigte Standardabweichung (S) ist die der resultierenden Kurse. Die Volatilität *σ* ist, wie unter 1.2.3 erläutert, die Standardabweichung der stetigen Verzinsungen, und damit zwar grob identisch, aber nicht exakt das Gleiche.

Ohne auf mathematische Details einzugehen muss daher als Standardabweichung (S) der Variationskoeffizient verwendet werden. Dieser berechnet sich bei der Lognormalverteilung mit:

$$S = VarK = E \cdot \sqrt{EXP\left(\sigma^2\right) - 1}$$

Die Notwendigkeit den Variationskoeffizienten zu verwenden bzw. die Unzulässigkeit des Gleichsetzens von Volatilität und Standardabweichung kann aus einem am Cox-Ross-Rubinstein angelehnten einperiodigen Beispiel zumindest einigermaßen anschaulich dargestellt werden.

Auch kann an dieser Stelle bereits im Vorgriff auf spätere Erläuterungen von der Erkenntnis ausgegangen werden, dass das unendlich periodige Cox-Ross-Rubinstein Binomialmodell eben den Wahrscheinlichkeiten der Lognormalverteilung entspricht.

Zeitpunkt (1) = [t]	Kurs (2) = K[t]	stetige Verzinsung (6) = ln(K[t] / K[t-1])	2. Moment (9) = ((6) - (7))^2	Gewichtung (9a)	Varianz (10) = Σ((9) * (9a))	Standardabweichung (11) = (10)^0,5
t	11,05 €					
t+1	14,19 €	25,00000%	6,25000%	43,78235%		
t	11,05 €					
t+1	8,61 €	-25,00000%	6,25000%	56,21765%		
					6,25000%	25,00000%

Zeitpunkt (1) = [t]	Kurs (2) = K[t]	resultierender Kurs (6) = (2)[t+1]	2. Moment (9) = ((6) - (7))^2	Gewichtung (9a)	Varianz (10) = Σ((9) * (9a))	Standardabweichung (11) = (10)^0,5
t	11,05 €					
t+1	14,19 €	14,19068 €	9,85311 €	43,78235%		
t	11,05 €					
t+1	8,61 €	8,60708 €	5,97621 €	56,21765%		
					7,67361 €	2,77013 €

Multipliziert man nun Erwartungswert und Volatilität erhielte man 2,76293 €, was nicht der oben ermittelten Standardabweichung der Kurse entspricht. Im unendlich periodigen Cox-Ross-Rubinstein Binomialmodell entspricht die Standardabweichung der Kurse dann immer eben dem aus der Volatilität errechneten Variationskoeffizienten.

$$S = VarK = E \cdot \sqrt{EXP\left(\sigma^2\right) - 1}$$

Setzt man diese Formel in die vorherige Formel zur Berechnung von β ein, erhält man nach kurzem Umformen die einfache Gleichung.

$$\beta = \sigma$$

Somit ist der Verteilungsparameter β in diesem Fall gleich der Standardabweichung der stetigen Verzinsungen.

Ist die Laufzeit der zu bewertenden Option ungleich ein Jahr, wird die Volatilität, wie schon beim Cox-Ross-Rubinstein Modell, wieder mit dem Zusammenhang aus 1.2.4 entsprechend skaliert.

3.2. Beispielhafte Vorgehensweise des Black76 Modells

Im ersten Schritt gilt es den Forwardkurs (F) zu bestimmen. Liegt für den Fälligkeitszeitpunkt der Option ein Marktwert vor, kann dieser direkt verwendet werden. Andernfalls kann dieser, zumindest im Beispiel der Aktienoption, durch Aufzinsen aus dem Kassakurs berechnet werden.

$$F = K \cdot e^{z \cdot t} \qquad 11{,}05\ € = 10\ € \cdot e^{0{,}10 \cdot 1}$$

Dieser Forwardkurs stellt nun gleichzeitig den Erwartungswert (E) der Lognormalverteilung dar. Hinsichtlich der Verwendung der Volatilität ist bekannt, dass diese direkt als Funktionsparameter β einfließt.

Damit gilt zusammenfassend: $E = 11{,}05 \qquad \beta = 25\% = 0{,}25$

Der noch fehlende Parameter ε der Lognormalverteilung berechnet sich mit:

$$\varepsilon = \ln(11{,}05) - \frac{0{,}25^2}{2}$$

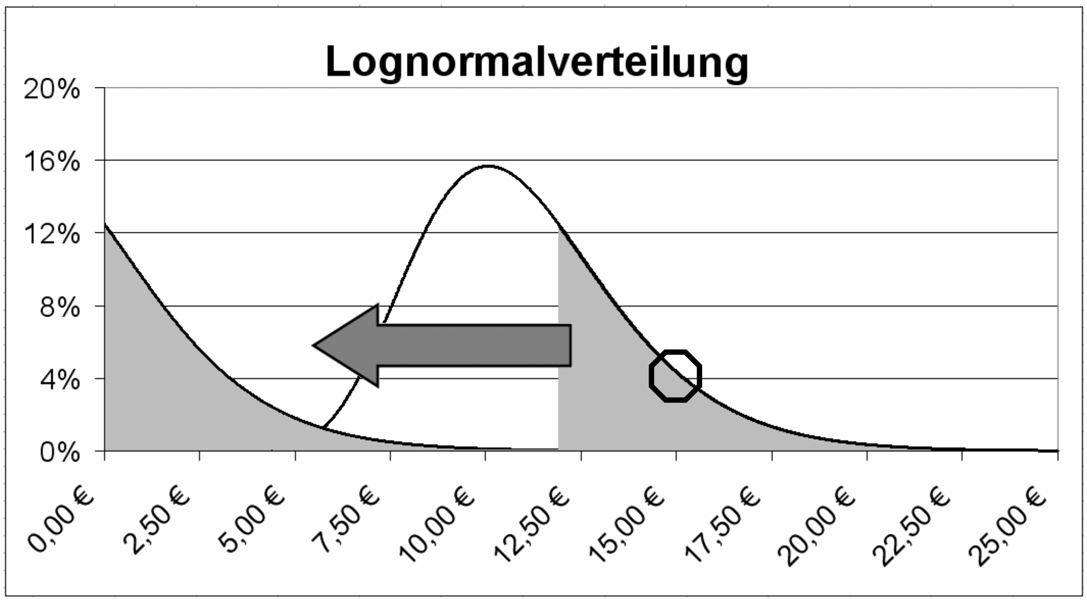
Der Vollständigkeit halber kann auch noch die Standardabweichung der späteren Verteilung vorab ermittelt werden.

$$2{,}81€ = S = \sqrt{EXP(2\varepsilon + \beta^2) \cdot (EXP(\varepsilon^2) - 1)}$$

Mittels der bereits vorgestellten Formel zum Berechnung der Wahrscheinlichkeitsdichten der Lognormalverteilung lassen sich diese nun für jede Stelle *x* berechnen.

$$f(x) = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{x} \cdot EXP\left(- \frac{(\ln(x) - \varepsilon)^2}{2\beta^2} \right)$$

Liegt nun die modellierte Verteilung[21] vor, und es gilt das gleiche Beispiel wie das der Call-Option aus dem Cox-Ross-Rubinstein Modell, können die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Auszahlungsprofile einfach an der nachfolgenden abgebildeten Lognormalverteilung abgelesen werden. So ist die Wahrscheinlichkeit für einen Aktienkurs von 15 € bzw. eine Auszahlung aus der Call-Option bei Fälligkeit mit einem Strike von 12 € in Höhe von 3 € etwa 4,3 %.



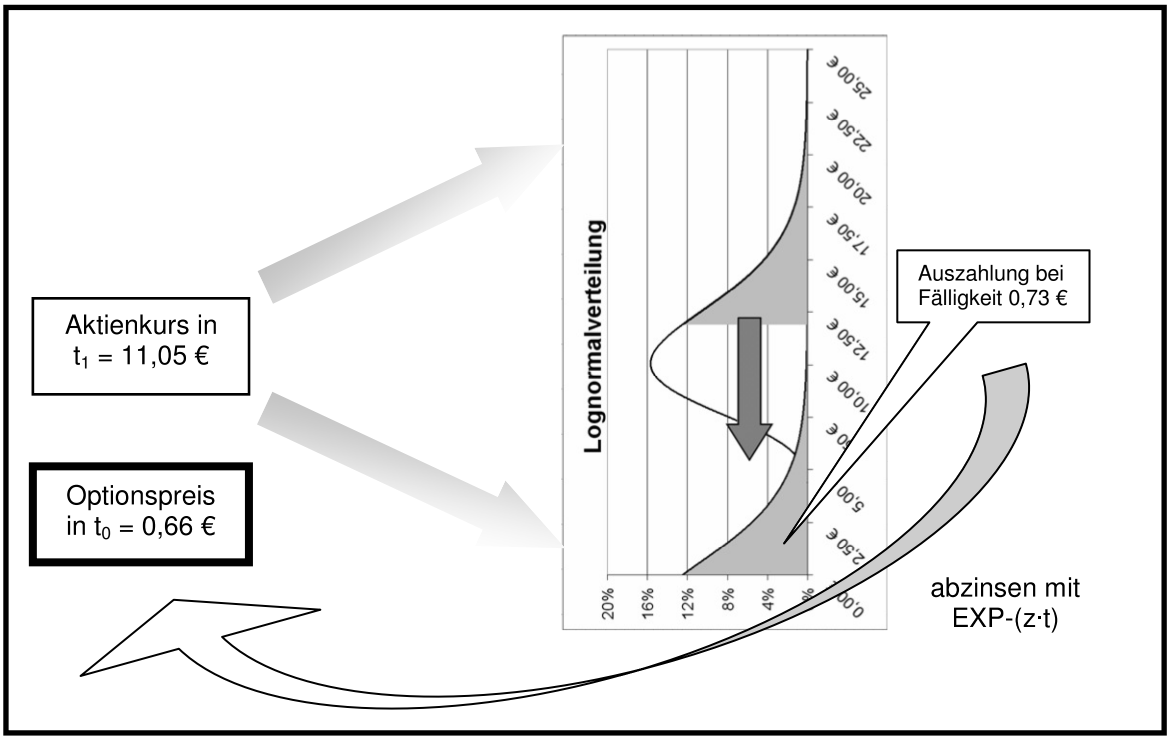
* Lognormalverteilung mit Erwartungswert bei 11,05 € und Standardabweichung von 2,81 €

Statt manuell zu kumulieren, was bei einer kontinuierlichen Verteilung ohnehin nicht möglich ist, nutzt man die bereits erwähnte Theorie der stochastischen Differentialgleichungen von Itō Kiyoshi, die aufgrund ihrer Komplexität hier nicht weiter erwähnt wird. Bildlich bedeutet dies, dass die Fläche jenseits des Strikes so verschoben wird, dass der Strike auf dem Nullpunkt liegt. Damit ist jede Wahrscheinlichkeit für eine Auszahlung aus der Call-Option direkt ablesbar.

[21] Bezogen auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung handelt es sich hier genau genommen um eine Dichtefunktion, deren Integral die eigentliche Wahrscheinlichkeitsverteilung darstellt.

Der Wert der Call-Option bei Fälligkeit ist nun der Erwatungswert bzw. das Integral dieses verschobenen grauen Kurventeils; 0,7336 €. Dieser Wert ist nun noch wie beim Cox-Ross-Rubinstein Modell mit *EXP(0,1)* auf t_0 abzuzinsen und ergibt hier mit 0,6638 € den Optionspreis, der mit dem Ergebnis aus dem 25-periodigen Binomialmodell aus 2.4. fast identisch ist.

Bildlich ist die Vorgehensweise ab der Ermittlung des Forwardkurses noch einmal im folgenden Schaubild dargestellt:



* Optionspreisbestimmung im Black76 Modell

3.3. Die Black76 Bewertungsformel

Die Black76 Bewertungsformel, hier für Call-Optionen, fasst alle Einzelschritte aus 3.2. in einem geschlossenen Formelausdruck zusammen.

$$C = e^{-(z \cdot t)} \left(F \cdot \mathrm{N}(d_1) - X \cdot \mathrm{N}(d_2)\right)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{X}\right) + \left(\frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma \cdot \sqrt{t}} = d_2 + \sigma \cdot \sqrt{t}$$

Insbesondere die Formelteile für die Variablen d_1 und d_2 greifen auf die Theorie der stochastischen Differentialgleichungen von Itō Kiyoshi zurück und werden daher nicht weiter erläutert. Der Formelteil, der die Zwischenergebnisse wieder zusammenführt, lässt sich zumindest wie folgt grob erläutern.

$\left(F \cdot \mathrm{N}(d_1) - X \cdot \mathrm{N}(d_2)\right)$ ermittelt den Optionspreis bei Fälligkeit

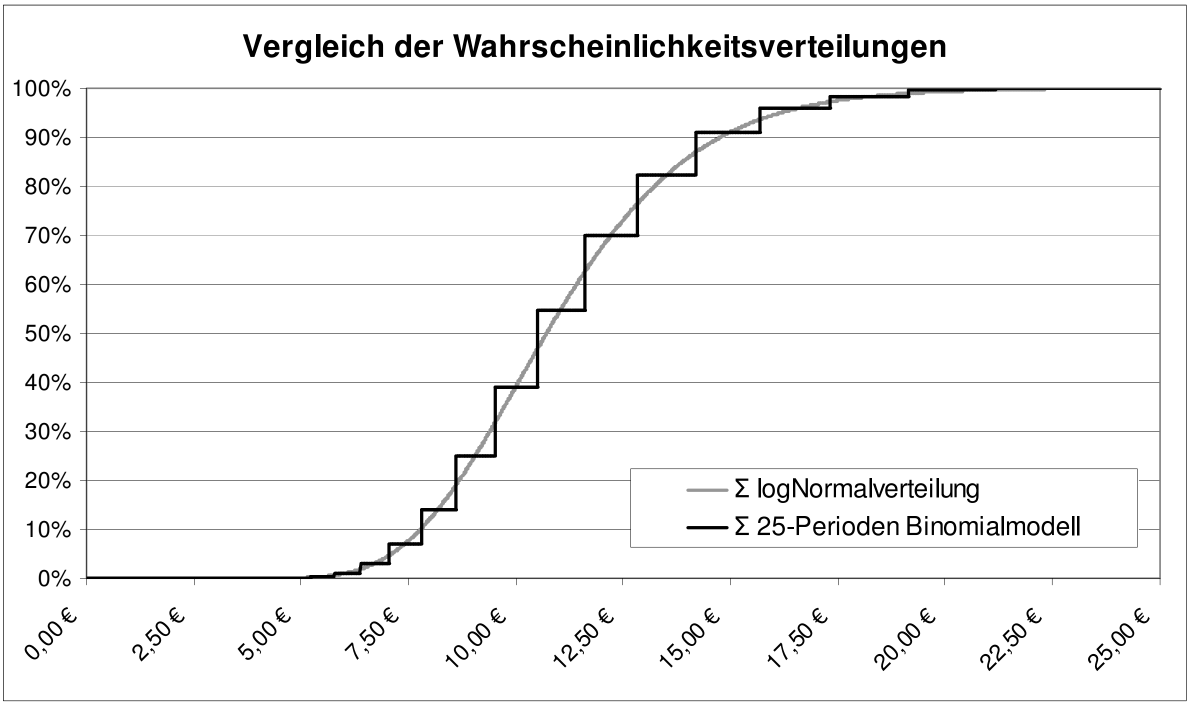
$e^{-(z \cdot t)}$ zinst diesen auf den aktuellen Zeitpunkt t_0 ab.

3.4. Vergleich von Black76 mit dem Cox-Ross-Rubinstein Modell

Alle bereits gemachten Ausführungen zu den beiden Modellen lassen sicher bereits an dieser Stelle den Schluss zu, dass sie im Grenzfall der unendlichen Perioden die Wahrscheinlichkeitsdichten mittels einer Lognormalverteilung modellieren. Das so genannte Beiwerk, wie Auf- und Abzinsen, ist in beiden Modellen sogar völlig identisch. Damit führen beide Modelle letztlich zu identischen Ergebnissen. Nur eine zu geringe Periodenanzahl des Binomialmodells kann entsprechende Differenzen auftreten lassen.

Für den Übergang des Binomialmodells in eine Lognormalverteilung seien an dieser Stelle nur die Wahrscheinlichkeitsverteilungen (kumulierte Dichtefunktionen) des 25-periodigen Binomialmodells aus 2.4 und der Lognormalverteilung aus 3.2 grafisch gegenübergestellt. Hier ist sehr gut erkennbar wie die Lognormalverteilung durch das

Binomialmodell approximiert wird. Dies kann durch das Erhöhen der Periodenanzahl im Binomialmodell weiter verbessert werden.



Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das Black76 Modell insbesondere durch seine einfache Handhabbarkeit besticht. Gedanken über eine ausreichende Periodenanzahl muss man sich hier keine machen. Auch sind viele Rechner und Programme bei für 1.000 Perioden notwendig werden Berechnungen wie *(1+uc)^1.000* bereits überfordert. Das Black76 bzw. das Black & Scholes Modell hingegen wurde teilweise sogar in Taschenrechner integriert, was mit dem Cox-Ross-Rubinstein Modell nicht ohne weiteres möglich ist. Das Cox-Ross-Rubinstein Modell hat hingegen auf anderen Gebieten wieder seine Stärken. Denn wenn die Option etwas exotischer ausgestattet ist, ist die Anwendung von Black76 ähnlichen Ansätzen nicht mehr möglich.

4. Herleitung von Black & Scholes aus dem Black76 Modell

In den folgenden Ausführungen soll nun gezeigt werden, dass das soeben erläuterte Black76 Modell mit dem bekannteren Black & Scholes Modell im Grunde identisch ist. Zwar gehen beide Varianten von unterschiedlichen Modellannahmen aus, jedoch führen diese, zumindest bei der Bewertung von Aktienoptionen[22], zu identischen Ergebnissen. Auch lassen sich beide Formeln mathematisch ineinander überleiten. Das Black76 Modell kann aufgrund der größeren Bandbreite an möglichen Basiswertarten aber als etwas flexibler angesehen werden.

4.1 Abgrenzung von Black76 gegenüber Black & Scholes

Das Black & Scholes Modell von 1973 beginnt beim heutigen Kassakurs des Basiswertes und unterstellt diesem für die Zukunft eine geometrische brownsche Bewegung, die einen Drift in Form der risikolosen Verzinsung aufweist. Dieser Drift entspricht in seiner Systematik auch dem des Cox-Ross-Rubinstein Modells.

Auf Aktien trifft diese modellhafte Annahme auch recht gut zu, denn sie sind quasi kostengünstig für die Zukunft speicherbar, indem man sie in einem Wertpapierdepot verwahrt. Handelt es sich beim Basiswert jedoch z.B. um Rohstoffe wie Agrarerzeugnisse, trifft dies nicht ohne weiteres zu. Kauft man heute beispielsweise Obst am Kassamarkt ein, fallen für die Lagerung verhältnismäßig hohe Kosten an. Weiterhin steht eventuell nur ein begrenztes Zeitfenster für den „Verbrauch“ der Ware zur Verfügung. Kauft man also Obst auf Termin, sind in diesem Preis auch diese verhältnismäßig hohen Lagerungskosten enthalten, die sich von der sicheren Verzinsung deutlich unterscheiden. Ist das Zeitfenster für den Verbrauch kürzer als die Terminperiode, kann der Kontraktpartner auch nur Ware liefern, die heute noch nicht einmal produziert wurde. Damit ist er weiteren Unwägbarkeiten wie z.B. Missernten ausgesetzt, die wieder einen preislichen Einfluss auf den Terminkurs haben können.

[22] Nur bei Aktienoptionen kann ein Vergleich erfolgen, da mit Black & Scholes ausschließlich Aktienoptionen bewertet werden können.

Daher ist oft zu beobachten, dass beispielsweise vor den Ernten ein systematischer Preisanstieg stattfindet, der nach der Erntezeit dann wieder in einen Preisrückgang übergeht. Ähnlich verhält es sich bei Rohstoffen wie Öl um die Winterzeit. Daher geht das 1976 entwickelte Black76 Modell nicht vom Kassa- sondern vom aktuellen Terminpreis am Fälligkeitstermin der Option aus. Dieser hat solche Preissteigerungen in der Zukunft bereits eingeschlossen. Auf diesen setzt man nun wieder, jetzt jedoch ohne einen Drift, die geometrische brownsche Bewegung auf.

Gleiches wie bei Rohstoffen gilt auch bei zinsabhängigen Geschäften wie Optionen auf Futures, Forwards bzw. Caps und Floors. Deren Preisabhängigkeit von der aktuellen Zinsstruktur ist vergleichbar mit der bei den Rohstoffen beschriebenen Abhängigkeit. Weiterhin sind mittlerweile manche Marktsegmente per Termin auch liquider als kassa, so dass in diesen Fällen der Terminkurs dann ohnehin die bessere Wahl ist.

Da für das Black76 sowohl aufgezinster Kassakurs als auch der Terminkurs verwendet werden können, kann man dieses gegenüber dem Black & Scholes Modell als das flexiblere Modell ansehen.

Back & Scholes – Der mit der risikolosen Verzinsung driftende Kassakurs folgt einer log-Normalverteilung

Für Optionen auf Aktien.

$$C = A \cdot \mathrm{N}(d_1) - X \cdot e^{-(z \cdot t)} \mathrm{N}(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{A}{X}\right) + \left(z + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma \cdot \sqrt{t}} = d_2 + \sigma \cdot \sqrt{t}$$

Black76 – Forwardkurs (eventuell aufgezinster Kassakurs) folgt einer log-Normalverteilung

Für Zinsoptionen, Rohstoffe etc.

$$C = e^{-(z \cdot t)} \left(F \cdot \mathrm{N}(d_1) - X \cdot \mathrm{N}(d_2)\right)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{X}\right) + \left(\frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma \cdot \sqrt{t}} = d_2 + \sigma \cdot \sqrt{t}$$

4.2 Mathematische Überleitung von Black76 in Black & Scholes

Für den bei Black76 geforderten Forwardkurs *F* auf den Fälligkeitstermin der Option setzt man den aufgezinsten Kassakurs *A* ein. Dann lässt sich zeigen, dass man diese angepasste Black76 Formel in die Black & Scholes Formel für Aktienoptionen umformen kann.

$$F = A \cdot e^{(z \cdot t)}$$

$$C = e^{-(z \cdot t)} \left(A \cdot e^{(z \cdot t)} \cdot \mathrm{N}(d_1) - X \cdot \mathrm{N}(d_2)\right)$$ (Ausgangsbasis: Black76 Formel)

$$C = A \cdot e^{(z \cdot t - z \cdot t)} \cdot \mathrm{N}(d_1) - X \cdot e^{-(z \cdot t)} \cdot \mathrm{N}(d_2)$$

$$C = A \cdot e^{(z \cdot t - z \cdot t)} \cdot \mathrm{N}(d_1) - X \cdot e^{-(z \cdot t)} \cdot \mathrm{N}(d_2)$$

$$C = A \cdot e^{(0)} \cdot \mathrm{N}(d_1) - X \cdot e^{-(z \cdot t)} \cdot \mathrm{N}(d_2)$$

$$C = A \cdot \mathrm{N}(d_1) - X \cdot e^{-(z \cdot t)} \cdot \mathrm{N}(d_2)$$ (Ergebnis: Black & Scholes Formel)

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{A \cdot e^{(z \cdot t)}}{X}\right) + \left(\frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot t}{\sigma \cdot \sqrt{t}} = d_2 + \sigma \cdot \sqrt{t}$$ (Ausgangsbasis Black76 Formel)

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{A}{X}\right) + \ln\left(e^{(z \cdot t)}\right) + \left(\frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot t}{\sigma \cdot \sqrt{t}}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{A}{X}\right) + z \cdot t + \left(\frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot t}{\sigma \cdot \sqrt{t}}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{A}{X}\right) + \left(z + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot t}{\sigma \cdot \sqrt{t}}$$ (Ergebnis: Black & Scholes Formel)

Weitere Umformungsvariante von Black76

$$C = e^{-(z \cdot t)} \left(F \cdot \mathrm{N}(d_1) - X \cdot \mathrm{N}(d_2)\right)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{X}\right)}{\sigma \cdot \sqrt{t}} + \frac{\sigma \cdot \sqrt{t}}{2} = d_2 + \sigma \cdot \sqrt{t}$$

5. Resümee über die bisher vorgestellten Modelle

Kurz lässt sich über die drei vorgestellten Modelle sagen, dass in Bezug auf Aktien Black76 mit Black & Scholes identisch ist. Black76 lässt sich jedoch noch auf weitere Basiswerte wie Rohstoffe anwenden. Das Cox-Ross-Rubinstein Modell lässt sich in der Variante ohne Drift ebenso flexibel wie das Black76 Modell einsetzen, ist jedoch nicht ganz so einfach anzuwenden wie der kompakte Formelausdruck von Black76. Damit spricht zunächst eigentlich nichts für das Cox-Ross-Rubinstein Modell, da mit Black76 alle Fragestellungen abgedeckt werden können. Diese Aussage ist auch korrekt solange man sich nur so genannte *plain vanilla*[23] Optionen beschränkt.

Bei der Bewertung von exotischen Optionen kann hingegen das Cox-Ross-Rubinstein Modell dann seine volle Flexibilität ausspielen. Fügt man der bisherigen Call-Option nur einen winzigen Zusatz hinzu, ist eine Bewertung mit Black76 schon kaum mehr möglich. So wird beispielsweise unterstellt, dass die Call-Option sofort wertlos wird, falls der Aktienkurs während der Laufzeit über 20 € steigt. Solche Regeln kann man nur noch mit Varianten des Cox-Ross-Rubinstein Modells berücksichtigen. Diese Flexibilität geht aber wiederum zu Lasten eines hohen Rechenaufwandes und einer aufwendigen Modellarchitektur, die teilweise hierfür betrieben werden müssen. Bei großen Periodenanzahlen treten zudem die unter 3.4 genannten Probleme auf. Dennoch hat sich die Idee das Cox-Ross-Rubinstein Modells heute, hauptsächlich aufgrund seiner Flexibilität bei exotischen Optionen, weitgehend durchgesetzt.

Wichtig ist auch immer im Hinterkopf zu haben, dass es sich nur um Optionspreismodelle und keine Optionspreisgesetze handelt. Wird eine Option nicht zu ihrem rechnerischen, modellhaften Preis gehandelt, muss man dies als nicht preisbestimmender Marktteilnehmer akzeptieren oder sich dem Markt fernhalten. Um diese Preise dennoch wieder mit den Modellen erklären zu können, passt man in der Regel die Volatilität so an, dass der rechnerische Preis wieder mit dem Optionspreis übereinstimmt und spricht hier von der durch den realen Optionspreis „impliziten Volatilität", die in diesem Fall dann von der historischen Volatilität abweicht.

[23] Als plain vanilla Option bezeichnet man klassisch strukturierte Optionen in den Varianten Put-Option oder Call-Option, die keinerlei zusätzliche Eigenschaften haben. Das Gegenteil sind exotische Optionen

Ein Grund hierfür kann das asymmetrische Gewinn- / Verlustprofil einer Call-Option ein. Der Verkäufer hat mit der Optionsprämie ein relativ begrenztes Gewinnpotential, dem jedoch, bei einem theoretisch ins Unendliche ansteigenden Aktienkurs, ein unbegrenztes Verlustpotential gegenübersteht. Daher wird der Verkäufer (Stillhalter) einer Call-Option, vorausgesetzt er geht nicht im Voraus schon von fallenden oder gleich bleibenden Kursen aus bzw. glaubt dies sicher zu wissen, immer versuchen sich diese Asymmetrie bezahlen zu lassen[24] indem er einen Preis zu erzielen versucht, der etwas über dem rechnerischen Preis liegt.

6. Monte-Carlo-Simulation eines Binomialmodells

Um die Flexibilität des Cox-Ross-Rubinstein Modells, im Folgenden Binomialmodell genannt, bei annehmbarem Rechenaufwand zu erhalten, bedient man sich der so genannten Monte-Carlo-Simulation, denn hohe Periodenanzahlen sind, wie unter Punkt 3.4 dargestellt, im reinen Binomialmodell nicht immer umsetzbar, da hierbei schnell ein hoher Speicherplatzbedarf entsteht. Auch ist die Programmierung einer Monte-Carlo-Simulation bei der Bewertung komplexer Produkte schneller umsetzbar. Wie dies in seinen Grundlagen eine praktische Umsetzung erfährt, wird nachfolgend erläutert.

Die Bezeichnung Monte-Carlo resultiert übrigens tatsächlich von der dortigen Spielbank, da bei der Monte-Carlo-Simulation das Ergebnis quasi »ausgewürfelt« wird. Es werden jedoch so viele Simulationsläufe durchgeführt, dass die Zufallskomponente nach und nach in den Hintergrund tritt und sich das Ergebnis dem tatsächlichen Ergebnis immer weiter annähert.

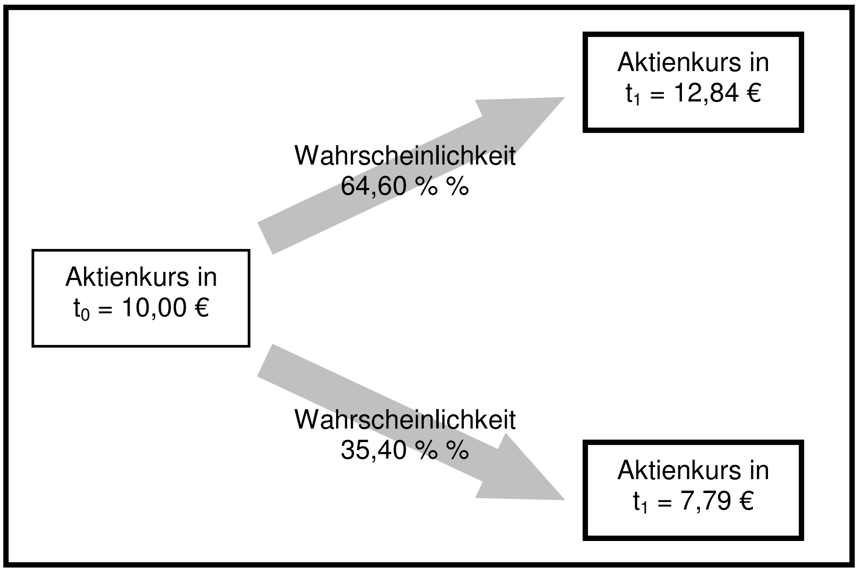
So lässt sich sogar die Zahl PI mittels einer Monte-Carlo-Simulation näherungsweise bestimmen[25]. Hierzu werden jeweils zwei unabhängige Zufallszahlen zwischen 0 und 1 einzeln quadriert; ist die Summe kleiner 1, so liefert der Simulationsdurchlauf das Ergebnis »wahr«, andernfalls»falsch«. Das Verhältnis der Simulationen mit Ergebnis »wahr« zu deren Gesamtanzahl multipliziert mit 4 ergibt eine Näherung für PI.

---

[24] Im Übertragenen Sinne kann dies mit den Ergebnissen von McKean, K. (1985), *Decisions* verglichen werden.
[25] Theis C., Kernbichler W. (2002), *Grundlagen der Monte Carlo Methoden*

6.1. Einfache Monte-Carlo-Simulation eines Binomialmodells

Zum Einstieg sei das einperiodige Binomialmodell aus 2.3 gegeben. Der Strike der Option sei zunächst bei 12,00 €.



Die Idee der Monte-Carlo-Simulation ist es nun, das hier zwar einfach bestimmbare Ergebnis, quasi auszuwürfeln. Dazu erzeugt man bei jedem Durchlauf eine Zufallszahl zwischen 0 und 1 (0 – 100%). Ist diese kleiner als 0,3540, so wird ein Aktienkurs von 7,79 € in t_1 angenommen, im umgekehrten Fall 12,84 €. Für den zweiten Fall ist die Option in t_1 somit 0,84 € wert; der »Würfel-Versuch« war erfolgreich, könnte man sagen.

Für jeden erfolgreichen Versuch kumuliert man ausgehend von einem Startwert von 0,00 € jeweils weitere 0,84 €. Teilt man diesen Betrag dann durch die Gesamtanzahl der Simulationsschritte, erhält man bei unendlich vielen Schritten genau den Preis von 0,55 € aus 2.3. Da die Anzahl der Schritte in der Praxis endlich sein muss, erhält man jedoch nur einen Näherungswert, dessen Güte noch von der Schrittanzahl abhängt. Hierin liegt bereits einer der Nachteile dieser Methode, denn dieser Näherungswert wird von Simulation zu Simulation immer etwas variieren. Ferner ist immer die die Anzahl der Simulationsschritte gegenüber dem Rechen- bzw. Zeitaufwand abzuwägen.

6.1.1. Programmtechnische Umsetzung

Die technische Umsetzung in einen Algorithmus erfolgt in der Programmiersprache PureBasic[26], da das Bewertungsprogramm auch mit der kostenfreien Demoversion von PureBasic compiliert werden kann. Der Programmaufbau ist zudem auch leicht in anderen Basicdialekten wie Visual Basic nachvollziehbar. Nachfolgend wird jedoch nur der eigentliche Programmkern erläutert. Weitere Teile, wie der Menüaufbau, werden hier nicht behandelt. Der gesamte Quellcode und die compilierte executable Datei sind hier eingebettet (wird unterstützt ab Acrobat 7.0):

- Quellcode: →
- executable Datei → (Dateiendung .ex_ in .exe umbenennen)

Vor dem Beginn des nachfolgenden Programmcodes wurden bereits alle relevanten Benutzereingaben abgefragt. Ebenso wurden bereits die upside- und downside changes mit ihren entsprechenden Wahrscheinlichkeiten und die Zerobond Abzinsungsfaktoren berechnet.

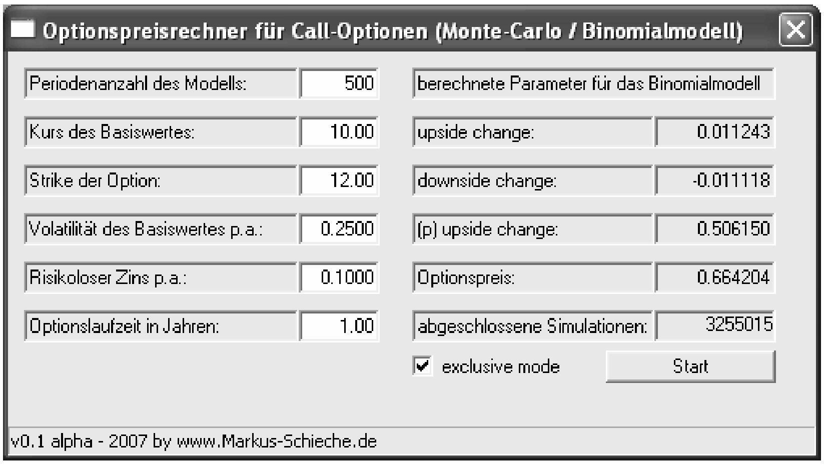
<u>Programmcode »Optionspreisrechner für Call-Optionen.pb« (Ausschnitt):</u>

```
; Kommentarzeilen sind nicht eingerückt, beginnen mit einem Semikolon und beziehen sich immer
auf den darüber liegenden Codeabschnitt.

    Kurs = u_kurs

; Vor jeder Simulation wird der Kurs des Basiswertes wieder auf seinen (heutigen) Ausgangswert
zrückgesetzt.

    For periode = 1 To u_perioden

; Die folgende Schleife wird sooft wiederholt wie Perioden vorgegeben wurden.

      ran = (Random(#genauigkeit) / #genauigkeit)
      If ran < p
```

[26] PureBasic Version 4.02

```
        kurs = kurs * (1 + uc)
      Else
        kurs = kurs * (1 + dc)
      EndIf

; Für einen Periodenabschnitt wird per Zufallsgenerator ermittelt ob der Basiswert einen »uc« steigt oder einen »dc« fällt

    Next
    If Kurs - u_strike > 0.00
      akk_Kurs  = akk_kurs + Kurs - u_strike
    EndIf

; Befindet sich am Laufzeitende nun der simulierte Kurs über dem Strike, so wird die positive Differenz der Variablen »akk_kurs« hinzugerechnet.

    simulation = simulation + 1
    SetGadgetText(#optionspreis_V, StrF((akk_Kurs / simulation) * zbaf))

; Die Ausgabe des Optionspreises erfolgt indem die akkumulierten Kurse durch die Anzahl der Simulationen geteilt wird, was noch einer Abzinsung unterzogen wird.
```

Gewonnen ist nach halbstündiger Berechnung mit dem folgenden Ergebnis freilich wenig. So wurde auch nicht exakt der Preis aus dem 500-periodigen Binomialmodell von Punkt 2.3 von 0,66375 € ermittelt. Lässt man das Programm mehrmals laufen, ergeben sich im Preis immer wieder kleinere Unterschiede, was bei einer Monte-Carlo-Simulation nie ganz vermeidbar ist.



* exemplarisches Ergebnis von »Optionspreisrechner für Call-Optionen.pb«

6.2. Bewertungsbeispiel eines komplex strukturierten Produktes

Im vorangegangenen Beispiel zeigte sich kein unmittelbarer Vorteil der Monte-Carlo-Simulation. Vielmehr konnte das Ergebnis noch konventionell berechnet werden; für eine unendliche Periodenanzahl konnte zudem noch auf eine Bewertung mittels Black76 bzw. Black & Scholes zurückgegriffen werden. Daher wird nun ein komplex strukturiertes Produkt bewertet, das mit den eben genannten Modellen nicht bzw. kaum zu bewerten ist.

Beispielprodukt: DZ MaxiRendTracker 12 (WKN DZ9VF8)

Das Zertifikat auf den GSCI Excess Return Rohstoff-Index wurde Valuta 26.08.2005 emittiert. Hierbei wurde am 23.08.2005 ein Indexstand von 759,180 Punkten zugrunde gelegt, der nachfolgend als Startwert bezeichnet wird. Der Emissionskurs betrug 100,0 %, wobei noch 2,5 % Ausgabeaufschlag erhoben wurden, was eigentlich einen Kurs von 102,5 % bedeutet. Da es jedoch hier um eine rechnerische Preisermittlung geht, werden die 2,5 % nachfolgend außer Acht gelassen.

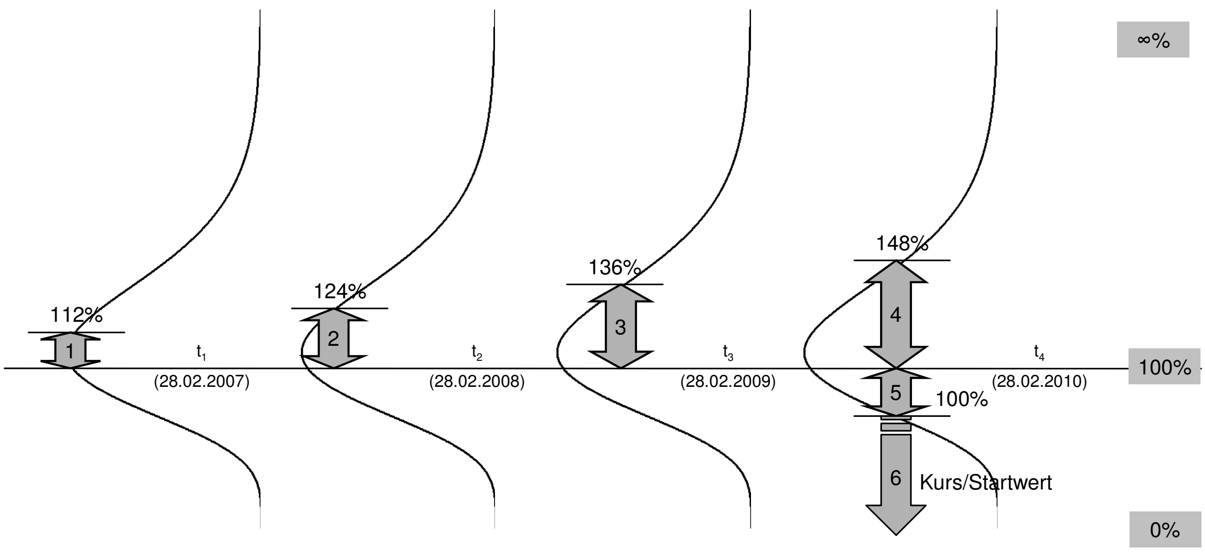
Als risikoloser Zins werden 2,60 % angenommen und die implizite Volatilität wurde iterativ ermittelt und mit 18 % angenommen.

Das Produkt besitzt folgendes Auszahlungsprofil:

- Liegt der Index am **26.02.2007** über dem Startwert (759,180) erfolgt eine Auszahlung von 112 % des Nominalbetrages und die Laufzeit endet vorab; andernfalls läuft das Zertifikat ohne Auszahlung weiter.
- Liegt der Index am **26.02.2008** über dem Startwert (759,180) erfolgt eine Auszahlung von 124 % des Nominalbetrages und die Laufzeit endet vorab; andernfalls läuft das Zertifikat ohne Auszahlung weiter.
- Liegt der Index am **26.02.2009** über dem Startwert (759,180) erfolgt eine Auszahlung von 136 % des Nominalbetrages und die Laufzeit endet vorab; andernfalls läuft das Zertifikat ohne Auszahlung weiter.
- Am **26.02.2010** endet die Laufzeit auf jeden Fall:
  - Liegt dann der Index über dem Startwert (759,180) erfolgt eine Auszahlung von 148 % des Nominalbetrages.
  - Liegt der Index unter (oder auf) dem Startwert (759,180) aber dennoch über 75 % des Startwertes (569,385) erfolgt eine Auszahlung von 100 % des Nominalbetrages.
  - Liegt dann der Index unter (oder auf) 75 % des Startwertes (569,385) erfolgt eine Rückzahlung im Verhältnis Indexstand / Startwert. Bei einem beispielhaften Indexstand von 379,590 wären dies 379,590 / 759,180 = 50 %

Hier sind bereits auf den ersten Blick einige Optionen enthalten, wobei diese zum Teil auch noch voneinander abhängig sind. Zum gleich folgenden Schaubild sei noch bemerkt, dass sich die Standardabweichung der Verteilungskurve im Zeitverlauf erhöhen müsste, was hier vereinfachend vernachlässigt wurde. Ebenso ergibt sich ab dem Zeitpunkt t_2 keine perfekte Lognormalverteilung mehr, da ab t_1 der Wahrscheinlichkeitsbereich oberhalb von 100 % abzuschneiden ist. Genau genommen wäre die Verteilung, die in t_1 gilt, mit einer ab 100 % abgeschnittenen Variante zu mathematisch falten, wodurch sich für das Resultat in t_2 dann auch die korrekte Standardabweichung ergäbe. Der Sachverhalt gilt für zu Zeitpunkte t_3 & t_4 entsprechend.

Die eben gemachte Beschreibung lässt erahnen wie schwer hier eine analytische Lösung zu modellieren wäre, die zudem nur für diesen speziellen Fall gelten würde. Die noch zu entwickelnde Monte-Carlo-Simulation ist in der Modellierung deutlich einfacher und auch schneller an neue Gegebenheiten anpassbar.



* Grafische Darstellung des DZ MaxiRendTracker 12 (WKN DZ9VF8)

Liegt der Kurs zu den Zeitpunkten t_1 bis t_4 in den jeweils von den Pfeilen 1-4 abgedeckten Bereichen, so erfolgt die Auszahlung des über dem entsprechenden Pfeil ausgewiesenen Prozentsatzes, was gegenüber einer Direktinvestition in den Index einen Mehrertrag bedeutet und im Grenzfall ein Äquivalent. Auf Erträge die oberhalb liegen verzichtet man jedoch bei einer Investition in das Zertifikat. Sofern der Index in t_4 jedoch unter dem Startwert liegt, ist man komplett am Verlust beteilig, wenn man einmal den Sicherheitspuffer in Form von Pfeil 5 vernachlässigt.

6.2.1. Programmtechnische Umsetzung

Die technische Umsetzung in einen Algorithmus erfolgt wieder in der Programmiersprache PureBasic[27] Der gesamte Quellcode und die compilierte executable Datei sind hier eingebettet (wird unterstützt ab Acrobat 7.0):

- Quellcode: →
- executable Datei → (Dateiendung .ex_ in .exe umbenennen)

Vor dem Beginn des nachfolgenden Programmcodes wurden bereits alle relevanten Benutzereingaben abgefragt. Ebenso wurden bereits die upside- und downside changes mit ihren Wahrscheinlichkeiten und die Zerobond Abzinsungsfaktoren berechnet.

Programmcode »Monte-Carlo-Bewertungsmodell (DZ9FV8) (26.08.2005).pb« (Ausschnitt):

; Kommentarzeilen sind nicht eingerückt, beginnen mit einem Semikolon und beziehen sich immer auf den darüber liegenden Codeabschnitt.

```
    kurs = u_kurs
```

; Vor jeder Simulation wird der Kurs des Index wieder auf seinen (heutigen) Ausgangswert zrückgesetzt.

```
   For periode = 1 To u_perioden
```

; Die folgende Schleife wird sooft wiederholt wie Perioden vorgegeben wurden.

[27] PureBasic Version 4.02

```
        ran = (Random(#genauigkeit) / #genauigkeit)
        If ran < p
          kurs = kurs * (1 + uc)
        Else
          kurs = kurs * (1 + dc)
        EndIf
```

; Für einen Periodenabschnitt wird per Zufallsgenerator ermittelt ob der Index einen »uc« steigt oder einen »dc« fällt

```
        Select periode
          Case Int(Ereignis_1_Tage / Ereignis_4_Tage * u_perioden)
```

; Ist die entsprechende Anzahl an Perioden bis zu »Ereignis_1« (28.02.2007) vergangen…

```
            If kurs > #startwert
```

; …wird geprüft ob der simulierte Kurs über dem Startwert liegt. …

```
              periode = u_perioden
              akk_kurs = akk_kurs + 112.000 * zbaf1
              E1 = E1 + 1
            EndIf
```

; … Ist dies der Fall, wird durch »periode = u_perioden« die Simulationsschleife vorzeitig verlassen und als Resultat aus der Simulation in »akk_kurs« 112 % übergeben, der bereits hier mit »zbaf1« abgezinst wird. Die Variable E1 ist statistischer Natur und dient später der Ermittlung wie häufig Ereignis 1 eintrat.

```
          Case Int(Ereignis_2_Tage / Ereignis_4_Tage * u_perioden)
            If kurs > #startwert
              periode = u_perioden
              akk_kurs = akk_kurs + 124.000 * zbaf2
              E2 = E2 + 1
            EndIf
```

; Sinngemäß wie die Beschreibung von Ereignis 1.

```
          Case Int(Ereignis_3_Tage / Ereignis_4_Tage * u_perioden)
            If kurs > #startwert
```

```
        periode = u_perioden
        akk_kurs = akk_kurs + 136.000 * zbaf3
        E3 = E3 + 1
      EndIf

; Sinngemäß wie die Beschreibung von Ereignis 1.

    Case u_perioden
      If kurs > #Startwert
        akk_kurs = akk_kurs + 148.000 * zbaf4
        E4 = E4 + 1

; Sinngemäß wie die Beschreibung von Ereignis 1.

      Else
        If kurs > #Sicherheitswert
          akk_kurs = akk_kurs + 100.000 * zbaf4
          E5 = E5 + 1

; Sinngemäß wie die Beschreibung von Ereignis 1, jedoch hier für den Fall dass der Index am Ende der Laufzeit zwischen Startwert und Sicherheitswert liegt.

        Else
          akk_kurs = akk_kurs + (kurs / #Startwert * 100 * zbaf4)
          akk_E6 = akk_E6 + (kurs / #Startwert * 100 * zbaf4)
          E6 = E6 + 1

; Sinngemäß wie die Beschreibung von Ereignis 1, jedoch hier für den Fall dass der Index am Ende der Laufzeit unter dem  Sicherheitswert liegt.

        EndIf
      EndIf
    Default
  EndSelect

Next
SetGadgetText(#optionspreis_V, StrF(akk_Kurs / simulation))

; In der Variable »akk_kurs« ist nun der kumulierte Kurswert aus allen Simulationsschritten gespeichert. Geteilt durch deren Anzahl ergibt dies den simulierten Preis des Zertifikats, also das
```

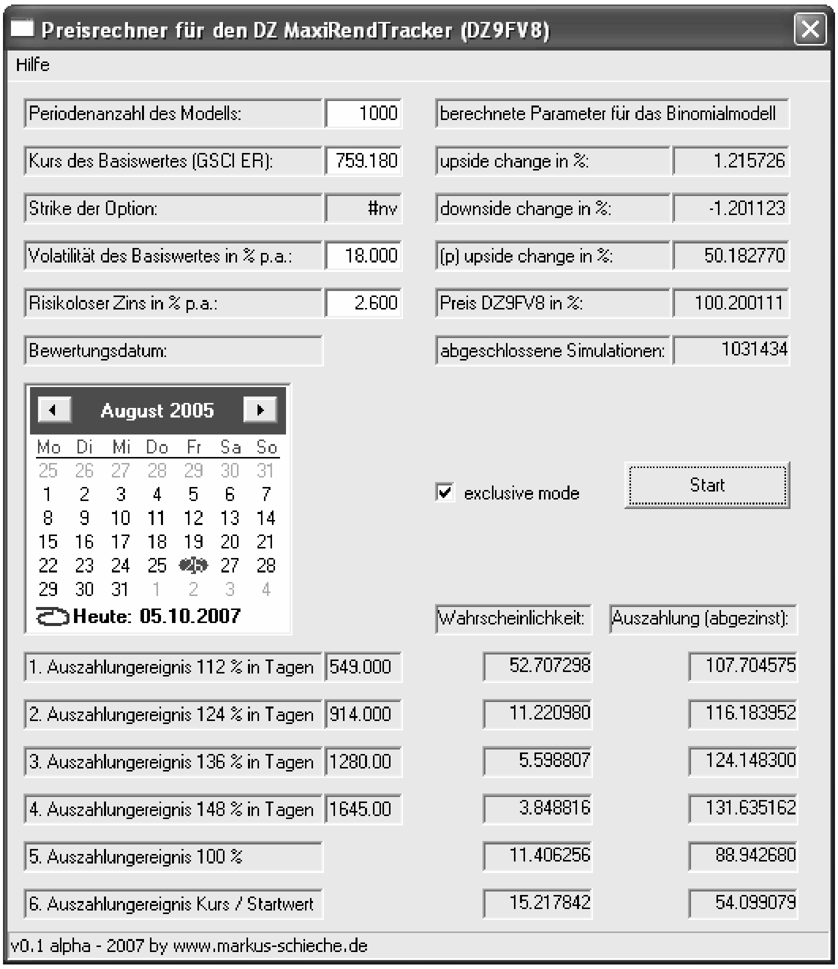
Ergebnis der gesamten Monte-Carlo-Simultion!

```
SetGadgetText(#simulationen_V, Str(simulation))
SetGadgetText(#E1, StrF(E1 / simulation*100))
SetGadgetText(#E2, StrF(E2 / simulation*100))
SetGadgetText(#E3, StrF(E3 / simulation*100))
SetGadgetText(#E4, StrF(E4 / simulation*100))
SetGadgetText(#E5, StrF(E5 / simulation*100))
SetGadgetText(#E6, StrF(E6 / simulation*100))
SetGadgetText(106, StrF(akk_E6 / E6))
```

; In den oberen Feldern werden zusätzlich statistische Werte ausgegeben.

```
simulation = simulation + 1
```

; der Simulationszähler wird um eins erhöht und es beginnt ein neuer Durchlauf.



* exemplarisches Ergebnis von »Monte-Carlo-Bewertungsmodell (DZ9FV8) (26.08.2005).pb«

Der soeben erläuterte Programmcode ist vielfältig modifizierbar. So können Auszahlungen oder die Ereigniszeitpunkte einfach verändert werden. Auch können einzelne Bedingungen hinzugefügt oder entfernt werden. Sogar Regeln wie Sonderauszahlungen, wenn der Basiswert drei Wochen vor Stichtag in einer bestimmten Range liegt sind möglich. Wichtig ist hierbei jedoch immer, dass allen möglichen Ereignissen, zumindest am Ende der Laufzeit, auch ein Resultat zugeordnet wird.

Bewertungen von Optionen, die sich auf mehr als einen Basiswert beziehen, sind ebenso möglich, jedoch müssen hier noch deren Korrelationen berücksichtigt werden. Wie man also sieht ist die Monte-Carlo-Simulation sehr flexibel einsetzbar.

Literaturverzeichnis

Black, F. and M. Scholes (1973), *The Pricing of Options and Corporate Liabilities,* Journal of Political Economy 81, No. 3 (May-June 1973), pp. 637-654.

- http://links.jstor.org/sici?sici=0022-3808%28197305%2F06%2981%3A3%3C637%3ATPOOAC%3E2.0.CO%3B2-P

Black F. (1976). *The pricing of commodity contracts*, Journal of Financial Economics, 3, 167-179.

- …

Bundesverband Deutscher Investment-Gesellschaften e.V. (BVI) (1996), *Rundschreiben MR 98/96*

- …

Cox JC, Ross SA & Rubinstein M. (1979), *Options pricing: a simplified approach*, Journal of Financial Economics, 7:229-263

- http://www.in-the-money.com/artandpap/Option%20Pricing%20-%20A%20Simplified%20Approach.doc

Cremers, Heinz (2000), *Konvergenz der binomialen Optionspreismodelle gegen das Modell von Black/Scholes/Merton*, HfB Schriftenreihe Nr. 26

- (ISSN 1436-9761)

Danielsson, Jon and Zigrand, Jean-Pierre (2005) *On Time-scaling of Risk and the Square-root-of-time Rule* (November 3, 2005). EFA 2004 Maastricht Meetings Paper No. 5339

- http://ssrn.com/abstract=567123

Fama, Eugene F. (1970), *Efficient Capital Markets*, The Journal of Finance, Volume 25, Issue 2, (May, 1970), 383-417.

- http://links.jstor.org/sici?sici=0022-1082%28197005%2925%3C383%3AECMARO%3E2.0.CO%3B2-U

Fama, Eugene F. (1965), *The Behaviour of Stock-Market Prices,* The Journal of Business Vol. 38 Issue 1 (Jan. 1965), pp. 34-105.

- http://links.jstor.org/sici?sici=0021-9398%28196501%2938%3A1%3C34%3ATBOSP%3E2.0.CO%3B2-6

Fama, Eugene F. (1965), *Random Walks in Stock Market Prices,* Selected Papers I No. 16, University of Chicago. (Zusammenfassung von *The Behaviour of Stock-…*)

- http://www.chicagogsb.edu/research/selectedpapers/sp16.pdf

McKean, K. (1985), *Decisions, Decisions*. Discover Magazine, pp 22-31, June 1985.

- …

Merton, R.C. (1973), *The Theory of Rational Option Pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science 4, No. 1(Spring 1973), pp. 141-183.

- http://links.jstor.org/sici?sici=0005-8556%28197321%294%3A1%3C141%3ATOROP%3E2.0.CO%3B2-0&origin=repec

Münstermann, Jörg (2000) *Der Anlageerfolg von Spezialfonds,* ZEB Schriftenreihe Band 25

- (ISBN 3-7819-0667-1)

PureBasic Version v4.02 (Windows - x86)

- Kostenlose Demoversion, mit der Programme mit bis zu 800 Code-Zeilen compiliert werden können, unter: http://www.purebasic.de/demo.shtml

Severin, Martin (2002) *Randbereiche von Verteilungen: Fat-Tails*

- http://www-m4.ma.tum.de/Papers/Severin/severin.pdf

Theis C., Kernbichler W. (2002), *Grundlagen der Monte Carlo Methoden*

- http://itp.tugraz.at/MML/MonteCarlo/MCIntro.pdf

Zimmermann, Heinz (1992) *Performance Messung im Asset Management*, in: Spremann, Klaus (Hrsg.): Controlling. Grundlagen, Informationssysteme, Anwendungen S. 48-109

- …

Versionsübersicht (changelog)

- ***Fassung Oktober 2007***
  - *Neuerstellung von Punkt 6*
- ***Fassung Juli 2007***
  - *Überarbeitung von Punkt 1.2.4*
- ***Fassung März 2007***
  - *weitere Literaturangaben*
  - *kleinere Anpassungen im Text*
- ***Fassung Februar 2007***
  - *erste Version*